CeVis
Fachbereich 3
Universität Bremen

Dr. Tobias Preußer

Mathematik zur Biologie

Wintersemester 2003/2004 — Übungen vom 06.01.04 — Abgabe am 16.01.04

Aufgabe 1. **3 Punkte**
Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 3$. Berechnen Sie die ersten drei Glieder der Taylor-Reihe von f entwickelt um den Punkt $x_0 = 1$. Zeichnen Sie ausserdem die Graphen der ersten drei Taylorpolynome $P_0(x)$, $P_1(x)$ und $P_2(x)$ zusammen mit der Funktion f im Bereich $x \in [0, 2]$ in ein Schaubild.

Aufgabe 2. **4 Punkte**
Finden Sie die Polstellen, die Nullstellen, die Extremstellen und die Wendepunkte der Funktion

$$h(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}.$$

Zeichnen Sie eine Skizze des Graphen der Funktion nur mithilfe der so gewonnenen Ergebnisse.

Aufgabe 3. **4 Punkte**
Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen

$$\frac{d}{dt}\Big((2t-3)(t^2-5)\Big), \qquad \frac{d}{du}(u^2-a)^{17}, \qquad \frac{d}{da}(u^2-a)^{17}, \qquad \frac{d}{d\alpha}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Aufgabe 4. **5 Punkte**
Es ist wohlbekannt, dass heimkehrende Tauben das Fliegen über grosse Wasserflächen vermeiden. Der Grund für dieses Verhalten ist bisher noch nicht vollständig verstanden. Man vermutet jedoch, dass die Tauben einen Umweg um einen See in Kauf nehmen, weil tagsüber die Luft über dem kalten Wasser nach unten fällt – ein Phänomen, das den Energieverbrauch der Tauben zum Halten einer bestimmten Flughöhe erhöht. In der Abbildung unten wird eine Taube von einem Boot (im Punkt B) auf der Westseite eines Sees ausgesetzt. Der Taubenschlag befindet sich im Punkt S an der Ostseite des Sees. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass die Südseite des Sees genau parallel zur horizonzalen Achse verläuft.
Der kürzeste Weg vom Boot in den Taubenschlag ist durch eine gestrichelte Linie angedeutet, jedoch fliegt die Taube einen Umweg: Zunächst fliegt sie zu einem Punkt P am südlichen Rand des Sees, um dann geradewegs nach Osten in den Taubenschlag zu gelangen. Die Frage ist nun, wie muss der Punkt P gewählt werden, um die für den Heimflug von B nach S (über P) benötigte Energie zu minimieren?

(a) Wie lassen sich die Grössen l und k durch r und den Winkel θ ausdrücken?

(b) Wir nehmen an, dass die Taube eine Energie von u verbraucht, um eine Längeneinheit über Land zu fliegen, und eine Energie von $2u$, um eine Längeneinheit über Wasser zu fliegen. Bestimmen Sie die Funktion $E(\theta)$, welche den gesamten Energieverbrauch für den Heimflug beschreibt. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse aus dem Aufgabenteil (a).

(c) Zeichnen den Graphen der Funktion $E(\theta)$ für den Wert $u = 1$.

(d) Bestimmen Sie die Ableitung $E'(\theta) = dE/d\theta$ und ermitteln Sie, bei welchem Wert θ_0 die Ableitung verschwindet. Wie hoch ist also die Energie E_0, welche die Taube für den Heimflug mindestens aufwenden muss?

(e) Verifizieren Sie, dass wirklich in E_0 ein Minimum vorliegt, indem Sie verschiedene von θ_0 verschiedene Werte für θ einsetzen.