Fachbereich 3
Universität Bremen

Dr. Tobias Preußer

Mathematik zur Biologie

Wintersemester 2003/2004 — Übungen vom 20.01.04 — Abgabe am 30.01.04

Aufgabe 1. **4 Punkte**

Finden Sie die Mittelwerte der folgenden Funktionen in den angegebenen Intervallen:

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ für $x \in [0, 6]$,

(b) $s(t) = t^2$ für $t \in [2, 3]$,

(c) $F(u) = \cos(u)$ für $u \in [-\pi/2, \pi/2]$,

(d) $K(r) = r^{-2}$ für $r \in [1, 3]$.

Aufgabe 2. **4 Punkte**

Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers K, der durch Rotation der Funktion

$$g(x) = (x-3)^2 - 1 \qquad \text{für } x \in [0, 5]$$

um die horizontale-Achse (x-Achse) entsteht.

Aufgabe 3. **4 Punkte**

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{df}{dx}(x) = y + 1 - x.$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Isoklinen $f'(x) = m$ ($m \in \mathbb{R}$), d.h. der Kurven, auf denen das Richtungsfeld konstante Steigung hat.

(b) Zeichnen Sie die Isoklinen für $m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ in ein Koordinatensystem. Zeichnen Sie ausserdem zwei Integralkurven mithilfe des durch die Isoklinen gewonnenen Richtungsfeldes.

Aufgabe 4. **4 Punkte**

Wir betrachten das Bevölkerungswachstum auf der Erde. Der Zeitpunkt $t = 0$ bezeichne das Jahr 1990 in dem $N = 5 \cdot 10^9$ Menschen auf der Erde gelebt haben. Die Funktion $u(t)$ gebe die relative Bevölkerungszahl im Vergleich zum Jahr 1990 an. Somit ist die tatsächliche Anzahl der auf der Erde lebenden Menschen zur Zeit t gleich $N \cdot u(t)$.

Ein einfaches Modell zur Berechnung des Bevölkerungswachstums geht davon aus, dass mehr Menschen sich auch schneller vermehren, d.h. das Wachstum ist proportional zur Anzahl der Menschen und genügt somit der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt}(t) = cu(t) \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

(a) Finden Sie die Funktion $u(t)$, welche diese Differentialgleichung löst und die Anfangsbedingung $u(0) = 1$ erfüllt.

(b) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der Funktion u für $c = 0.02$ an, und erläutern Sie, warum das obige Modell nicht der Realität entsprechen kann.

Ein besseres Modell geht von der sogenannten *logistischen Gleichung*, d.h. der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt}(t) = c\left(\frac{\beta - u(t)}{\beta - 1}\right)u(t)$$

aus. Der Wert $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ dient zur Justierung des Modells—wir setzen jedoch der Einfachheit wegen $\beta = 2$.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(t) = \frac{2\exp(2ct)}{1 + \exp(2ct)}$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist und den Anfangswert $u(0) = 1$ hat.

(d) Skizzieren Sie den Graphen der Lösung des zweiten Modells für $c = 0.02$ und erläutern Sie das Verhalten der Funktion für $t \to \infty$. Warum ist dieses Modell besser zur Beschreibung der Bevölkerungsentwicklung geeignet?