ÜBUNG 9:

$f(x) = x^3 - 2x + 3$ $\qquad$ $f(1) = 1 - 2 + 3 = \underline{\underline{2}}$

$f'(x) = 3x^2 - 2$ $\qquad$ $f'(1) = 3 - 2 = 1$

$f''(x) = 6x$ $\qquad$ $f''(1) = 6$

$f'''(x) = 6$ $\qquad$ $f'''(1) = 6$

D.h. <u>0. Glied d. Taylor-Reihe:</u>

$$f^{(0)}(x_0)(x - x_0)^0 = \underline{\underline{2}}$$

<u>1. Glied:</u>

$$f^{(1)}(x_0)(x - x_0)^1 = 1 \cdot (x-1) = \underline{\underline{(x-1)}}$$

<u>2. Glied:</u>

$$f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 = \underline{\underline{6 \cdot (x-1)^2}}$$

<u>3. Glied:</u>

$$f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 = \underline{\underline{6 \cdot (x-1)^3}}$$

Die Taylor polynome sind dann:

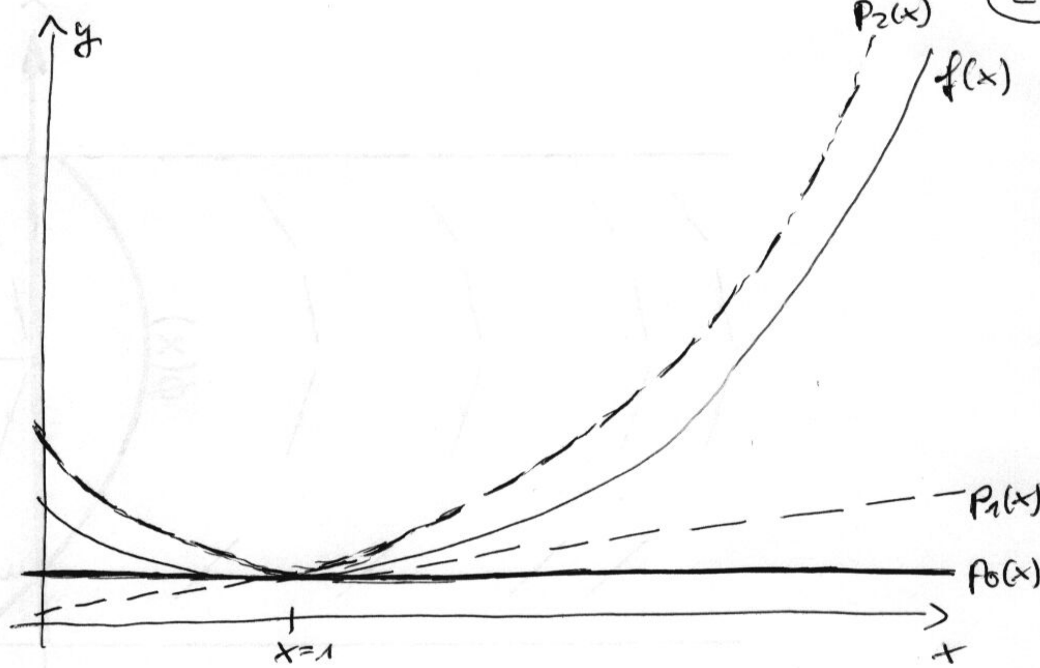
$$P_0(x) = \underline{\underline{2}}$$

$$P_1(x) = (x-1) + 2 = \underline{\underline{x+1}}$$

$$P_2(x) = P_1(x) + 6 \cdot (x-1)^2 = 6(x-1)^2 + x + 1$$

$$= 6(x^2 - 2x + 1) + x + 1 = \underline{\underline{6x^2 - 11x + 7}}$$

-2-



② $h(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-4} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x}{x+2}$

$h'(x) = \frac{(x+2)-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$

$h''(x) = \frac{0\cdot(x+2)^2 - 2\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = -\frac{4}{(x+2)^3}$

Nullstellen: $h(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \boxed{x=0}$

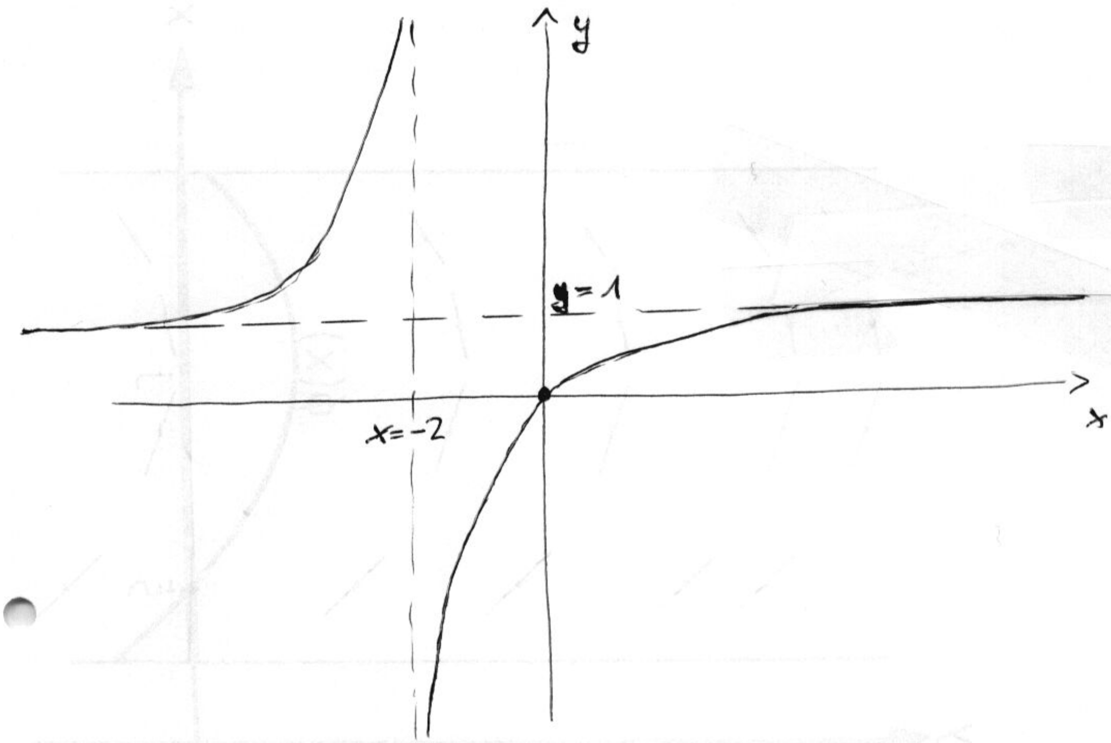
Extremstellen: notwendig: $h'(x) \stackrel{!}{=} 0$ aber $2 \neq 0$

$\Rightarrow$ keine Extremstellen

Wendepunkte: $h''(x) \stackrel{!}{=} 0$ aber $-4 \neq 0$

$\Rightarrow$ keine Wendepunkte

Polstellen: $x+2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-2}$



Polstelle

Zusatzinfos: Links der Polstelle d.h. $x<-2$: $h(x)>0$

zwischen Pol und Nst : $-2<x<0$: $h(x)<0$

Rechts der Nullstelle : $x>0$: $h(x)>0$

Für $x \to \pm\infty$ geht der Graph gegen $y=1$.

3

$$\frac{d}{dt}\left((2t-3)(t^2-5)\right) = 2(t^2-5)+(2t-3)(2t) = \ldots$$

nach Produktregel

$$\frac{d}{du}(u^2-a)^{17} = 17(u^2-a)\,2u \quad = \ldots$$

nach Kettenregel

$$\frac{d}{da}(u^2-a)^{17} = 17(u^2-a)\cdot 1 \quad = \ldots$$

nach Kettenregel

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-(\sin\alpha)(\sin\alpha)-(\cos\alpha)(\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

$$= -\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \underline{\underline{-\frac{1}{\sin^2\alpha}}}$$

(4a) Es gilt:

$$r = l\cdot\sin\vartheta \iff \boxed{l = \frac{r}{\sin\vartheta}}$$

$$k = l\cdot\cos\vartheta = \frac{r}{\sin\vartheta}\cos\vartheta = \boxed{\frac{r}{\tan\vartheta}}$$

(4b)

Energieverbrauch über die Wasserstrecke:

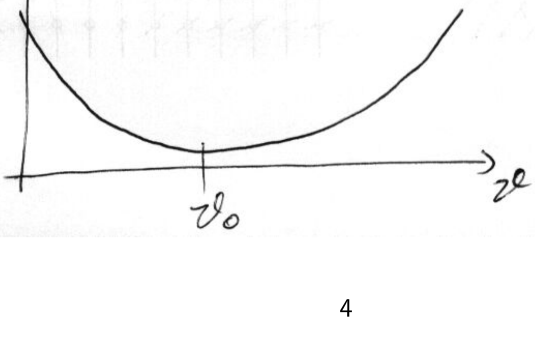
$$E_{Wasser}(\vartheta) = 2u\cdot l = \frac{2ru}{\sin\vartheta}$$

$$E_{Land}(\vartheta) = u\cdot(s-k) = u\cdot\left(s-\frac{r}{\tan\vartheta}\right)$$

$$E(\vartheta) = E_{Wasser}(\vartheta) + E_{Land}(\vartheta)$$

$$= u\cdot\left(\frac{2r}{\sin\vartheta} + s - \frac{r}{\tan\vartheta}\right)$$

(4c) Setze im Folgenden $\underline{\underline{r=2,\ s=4}}$!



4d

$$E(\vartheta) = u \cdot r \left(\frac{2}{\sin(\vartheta)} - \frac{1}{\tan(\vartheta)} + \frac{s}{r} \right)$$

$$\frac{dE}{d\vartheta} = u \cdot r \left(\frac{-2\cos(\vartheta)}{\sin^2(\vartheta)} + \underbrace{\frac{1}{\sin^2(\vartheta)}}_{\text{Ergebnis aus Aufgabe 3d verwendet}} + 0 \right)$$

Extremwert: <u>notwendig:</u> $E'(\vartheta) \stackrel{!}{=} 0$

also $-2\cos(\vartheta) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos(\vartheta) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{\vartheta = 60^\circ}$

<u>hinreichend:</u> Wird durch Teil (4e) ersetzt.

$\Rightarrow E(60^\circ) = 2\left(\frac{2}{0{,}866} - \frac{1}{1{,}7} + \frac{4}{2}\right) = \underline{7{,}44}$

4e Betrachte $\vartheta = 70^\circ, 80^\circ, 50^\circ, 40^\circ$

$E(70^\circ) = 2(2{,}12 - 0{,}36 + 2) = 7{,}52$

$E(80^\circ) = 2(2{,}02 - 0{,}17 + 2) = 7{,}7$

$E(50^\circ) = 2(2{,}6 - 0{,}85 + 2) = 7{,}5$

$E(40^\circ) = 2(3{,}1 - 1{,}19 + 2) = 7{,}82$

Der minimale Wert $E(\vartheta_0) = 7{,}44$ scheint wirklich ein Min zu sein!