(1a) ÜBUNG 11: -1-

$$\int_0^6 \left(\frac{1}{2}x+3\right)dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x}{4}^2+3x\right]_0^6 = \frac{1}{6}\left[\frac{36}{4}+18\right] = \underline{\underline{9/2}}$$

(1b)

$$\int_2^3 t^2\,dt = \frac{1}{3-2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_2^3 = \frac{1}{1}\left[\frac{1}{3}27-\frac{1}{3}8\right] = \underline{\underline{\frac{19}{3}}}$$

(1c)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)\,du = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\left[\sin(u)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[1-(-1)\right] = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}}}$$

(1d)

$$\int_1^3 r^{-2}\,dr = \frac{1}{3-1}\left[-\frac{1}{r}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{1}\right)\right]$$

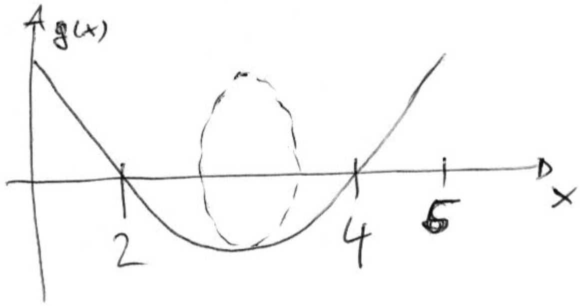
$$= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

---

(2) Bestimme zunächst die Nullstellen von g:

$$0 \stackrel{!}{=} (x-3)^2-1$$

$$\Leftrightarrow 1 = \pm(x-3) \quad \Leftrightarrow x \in \{2, 4\}$$



Da die Funktion aber beim Rotationsvolumen nur quadratisch vorkommt, müssen wir das Integral nicht aufspalten:

$$Vol(K) = \int_0^5 \pi \cdot [g(x)]^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^5 \underbrace{[(x-3)^2-1]^2}_{} \, dx$$

$$= [x^2-6x+9-1]^2$$

$$= x^4 - 2\cdot 6x^3 + 2\cdot 8x^2 + 36x^2 - 2\cdot 48x + 64$$

$$= \pi \int_0^5 [x^4 - 12x^3 + 16x^2 + 36x^2 - 96x + 64] \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{12}{4}x^4 + \frac{52}{3}x^3 - \frac{96}{2}x^2 + 64x\right]_0^5$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}5^5 - 3\cdot 5^4 + \frac{52}{3}5^3 - 48\cdot 5^2 + 64\cdot 5\right]$$

$$= \pi \left[-1250 + 2166\tfrac{2}{3} - 1200 + 320\right]$$

$$= \pi\left(36\tfrac{2}{3}\right)$$

(3a) (3)

$f' = y + 1 - x$

Es soll gelten $f' = m$ für $m \in \mathbb{R}$, also

$m = y + 1 - x$

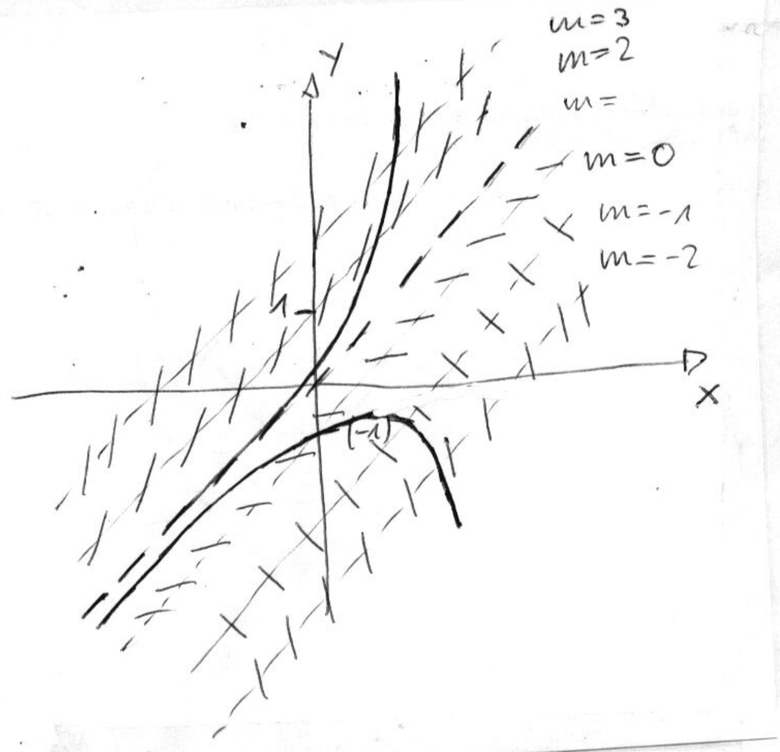
$\Leftrightarrow \quad y = m - 1 + x$

d.h. die Isoklinen werden beschrieben durch

$y = x + (m-1)$

(das sind)

(3b)



(4a) -4-

$$\frac{du}{dt}(t) = c\,u(t) \quad \text{für } c \in \mathbb{R}$$

Wir vermuten, dass $u(t) = A\exp(ct)$ die DGL löst. Nachprüfen:

$$\frac{du}{dt} = Ac\exp(ct) = c(\underbrace{A\exp(ct)}_{u(t)}) = c\,u(t) \checkmark$$

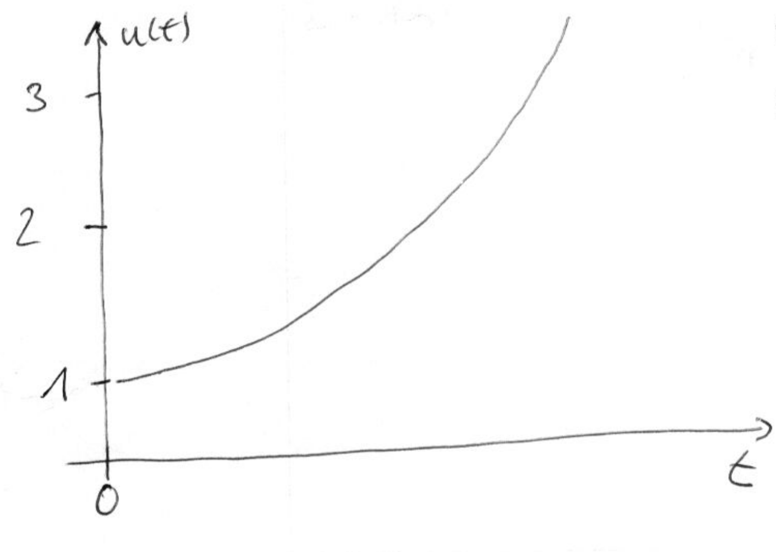
Anfangsbedingungen:

$$u(t=0) \overset{!}{=} 1$$

$$u(t=0) = A\exp(c\cdot 0) = A \quad \Rightarrow A = 1$$

Die Fkt $u(t) = \exp(ct)$ löst die DGL und erfüllt die AB $u(0) = 5\cdot 10^9$.

(4b)



Problem: Die Funktion steigt immer weiter. Dies ist unrealistisch, denn die Erde kann nicht unbegrenzt viele Menschen ernähren!

(4c)

$$u(t) = \frac{2\exp(2ct)}{1+\exp(2ct)}$$

$$\frac{du}{dt} = \left[\frac{2\cdot 2c\exp(2ct)\left[1+\exp(2ct)\right] - 2\exp(2ct)\,2c\exp(2ct)}{(1+\exp(2ct))^2}\right]$$

$$= \left[2c\,\frac{2\exp(2ct)\cancel{\left[1+\exp(2ct)\right]}}{(1+\exp(2ct))^{\cancel{2}}} - c\,\frac{4\left[\exp(2ct)\right]^2}{(1+\exp(2ct))^2}\right]$$

$$= c\left[2\,\underbrace{\frac{2\exp(2ct)}{1+\exp(2ct)}}_{=u(t)} - \underbrace{\frac{\left[2\exp(2ct)\right]^2}{(1+\exp(2ct))^2}}_{=[u(t)]^2}\right]$$

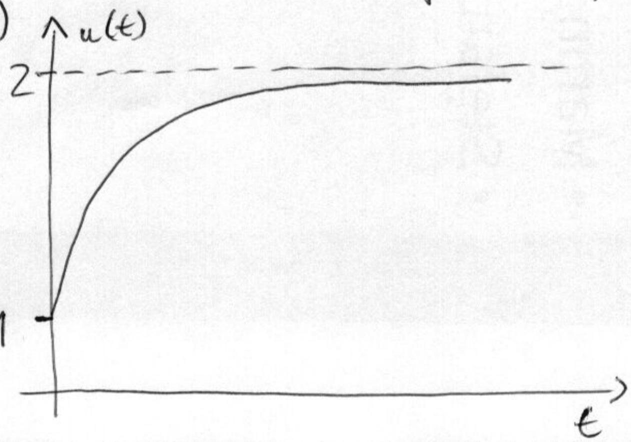
$$= c\left(2u(t) - [u(t)]^2\right) = c\left(2-u(t)\right)u(t)$$

Also löst $u(t)$ tatsächlich die DGL. ✓

Anfangswert:

$$u(0) = \frac{2\exp(2c\cdot 0)}{1+\exp(2c\cdot 0)} = \frac{2}{1+1} = \underline{\underline{1}}$$

(4d)



Die Lsg hat für $t\to\infty$ den Grenzwert $u(t\to\infty)=2$ (siehe unten)
Somit wird durch die Gleichung modelliert, daß die Erde nur

6

eine maximale Zahl von Menschen ernähren kann. Hier ist diese Zahl $= 2 \cdot N = 10 \cdot 10^9$ Menschen.

Grenzwert für $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{2\exp(2ct)}{1 + \exp(2ct)}$$

exp(2ct) kürzen

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{2}{\frac{1}{\exp(2ct)} + 1}$$

aber $\exp(2ct) \to \infty$ für $t \to \infty$

somit $\frac{1}{\exp(2ct)} \to 0$ für $t \to \infty$

und schließlich:

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}.$$