Mathematik zur Biologie
Klausur vom 20.02.2004
Musterlösung

Christian Drücker Raimund Klein Tobias Preusser

8. März 2004

Aufgabe 1

P	Q	R	$\neg R$	$Q \vee (\neg R)$	$P \wedge (Q \vee (\neg R))$
W	W	W	F	W	W
W	W	F	W	W	W
W	F	W	F	F	F
W	F	F	W	W	W
F	W	W	F	W	F
F	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	F
F	F	F	W	W	F

Aufgabe 2

Arithmetisches Mittel

Die allgemeine Formel für das arithmetische Mittel von n verschiedenen Werten x_i ist:

$$w_A = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

In diesem Fall:

$$w_A = \frac{1}{5} \cdot (2 + 5 + 3 + 1 + 4) = \frac{15}{5} = 3$$

Harmonisches Mittel

Die allgemeine Formel für das harmonische Mittel von n verschiedenen Werten x_i ist:

$$w_H = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \right)^{-1}$$

In diesem Fall:

$$\begin{aligned} w_H &= \left(\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{4}\right)\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{30 + 12 + 20 + 60 + 15}{60}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{137}{60}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\frac{137}{300}} = \frac{300}{137} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$a_i = -\frac{2}{i^2}$$

Die Folge a_i ist monoton wachsend, da für alle i gilt:

$$a_{i+1} = -\frac{2}{(i+1)^2} = -\frac{2}{i^2 + 2i + 1} > \frac{2}{i^2} = a_i$$

Da die Folge monoton wächst, entspricht ihre größte untere Schranke dem ersten Folgenglied $a_1 = -\frac{2}{1^2} = -2$. Sie bleibt jedoch immer negativ und besitzt folglich eine obere Schranke bei 0. Die 0 ist ebenfalls Grenzwert der Folge im Unendlichen und somit einziger Häufungspunkt.

$$b_i = \begin{cases} 5 & \text{falls } i \text{ gerade,} \\ \frac{1}{i} & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Folge ist nicht monoton, z.B.: $b_1 = 1 < 5 = b_2 > \frac{1}{3} = b_3$. Da offenbar alle Folgenglieder positiv sind, ist 0 eine untere Schranke. Für gerade i ist das Folgenglied immer 5, für ungerade i immer ein Bruch < 1. Somit ist 5 eine obere Schranke. Da jedes zweite Folgenglied $= 5$ ist (und somit unendlich viele), ist 5 auch ein Häufungspunkt. Betrachtet man nur die ungeraden Folgenglieder, so ist deren Grenzwert 0. Somit ist 0 ein zweiter Häufungspunkt von b_i.

Aufgabe 4

(a)

Sei a_n die Seitenlänge des im Schritt n aufgesetzten Quadrats. Für die Flächen A_n gilt dann:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Der Skalierungsfaktor für die Flächen der aufgesetzten Quadrate beträgt also $\frac{1}{4}$.

(b)

Die Fläche der Gesamtfigur nach n Schritten kann mithilfe der *geometrischen Reihe* berechnet werden:

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1-(\frac{1}{4})^{n+1}}{1-(\frac{1}{4})} = \frac{1-(\frac{1}{4})^{n+1}}{\frac{3}{4}} = 4 \cdot \frac{1-(\frac{1}{4})^{n+1}}{3}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left(4 \cdot \frac{1-(\frac{1}{4})^{n+1}}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x - 2x^2 + \frac{1}{4}x^3 \\
f'(x) &= 4 - 4x + \frac{3}{4}x^2 \\
f''(x) &= -4 + \frac{3}{2}x
\end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
\frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 4x &= 0 \\
x\left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4\right) &= 0 \\
x\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x = 0 \qquad &\vee \qquad \frac{1}{2}x - 2 = 0 \\
x = 0 \qquad &\vee \qquad \frac{x}{2} = 2 \\
x = 0 \qquad &\vee \qquad x = 4
\end{aligned}$$

Nullstellen der Funktion f befinden sich also bei $x = 0$ und bei $x = 4$.

Extremstellen:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{3}{4}x^2 - 4x + 4 &= 0 \\
x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{16}{3}} \\
x_{1/2} &= \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64-48}{3}} \\
x_{1/2} &= \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}} \\
x_{1/2} &= \frac{8 \pm 4}{3}
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{4}{3} \qquad \vee \qquad x = 4$$

$$
\begin{aligned}
f''\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} - 4 = 2 - 4 = -2 \\
f''(4) &= -4 + \frac{3}{2} \cdot 4 = -4 + 6 = 2
\end{aligned}
$$

Für $x = \frac{4}{3}$ liegt also ein Maximum, für $x = 4$ ein Minimum vor.

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 4 \cdot \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{16}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{27} = \frac{16}{3} - \frac{32}{9} + \frac{16}{27} = \frac{144 - 96 + 16}{27} = \frac{64}{27}$$

Das Maximum liegt also bei $\left(\frac{4}{3}, \frac{64}{27}\right)$, das Minimum bei $(4, 0)$ (da $x = 4$ Nullstelle ist).

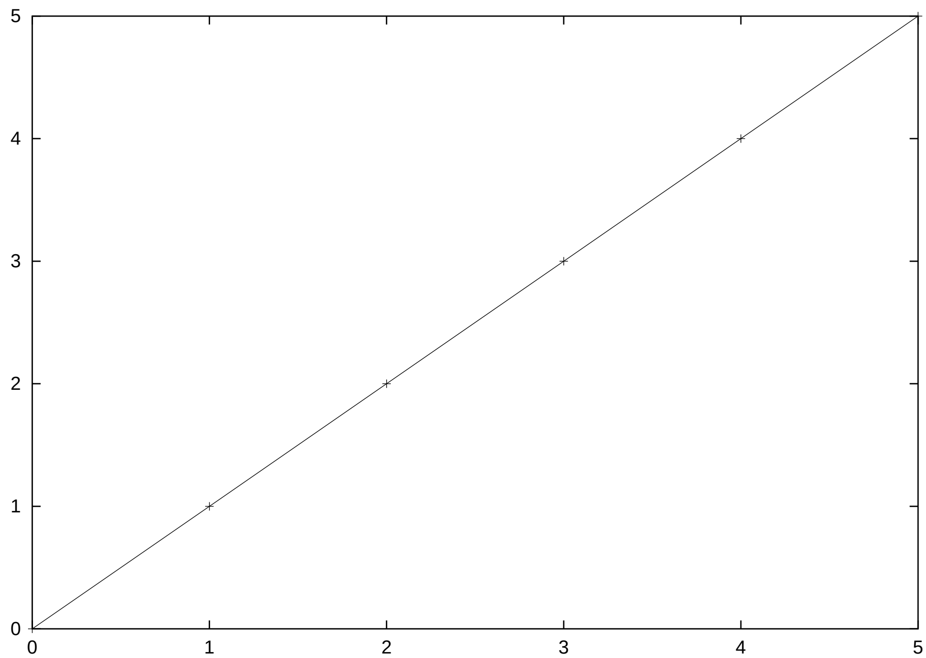
Aufgabe 6

Tabelle mit logarithmierten Werten:

t_i	1	2	3	4	5
g_i	3	9	27	81	243
$\gamma_i = \log_3(g_i)$	1	2	3	4	5

(a), (b)

Zeichnung:

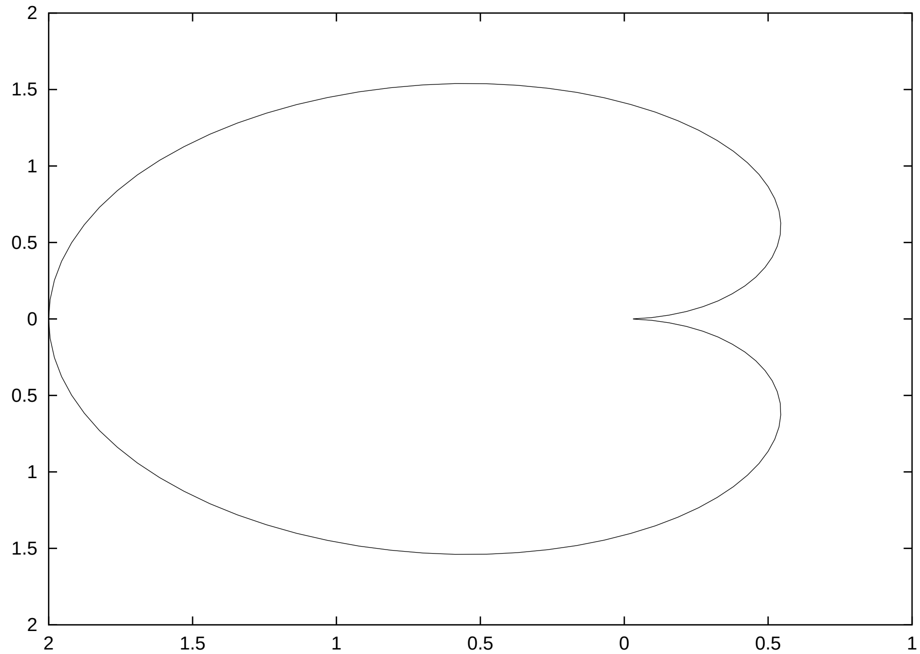


Die Geradengleichung lautet $\gamma(t) = t$.

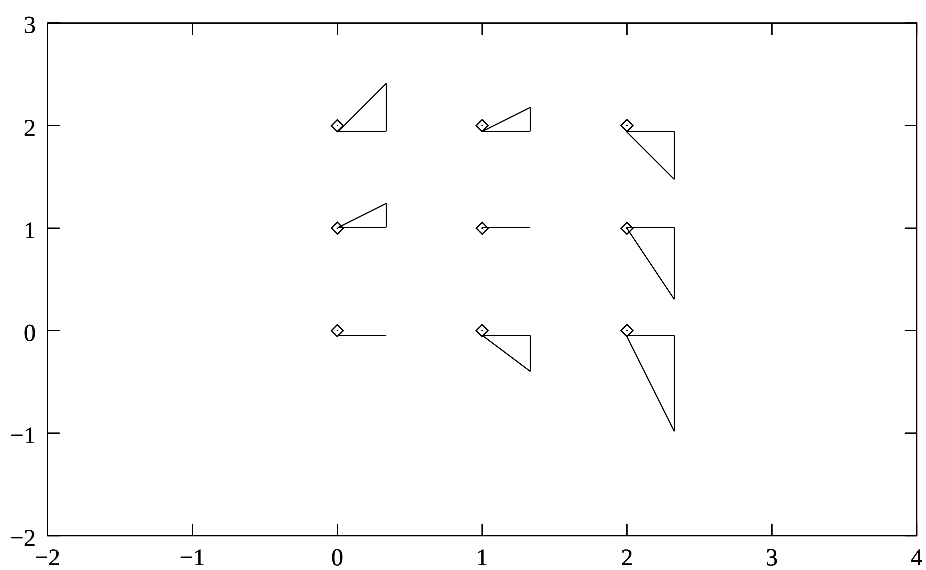
(c)

$$\begin{aligned} \log_3(g(t)) &= \gamma(t) \\ \Leftrightarrow g(t) &= 3^{\gamma(t)} \\ \Leftrightarrow g(t) &= 3^t \end{aligned}$$

Aufgabe 7



Aufgabe 8



Das Richtungsfeld deutet in jedem Punkt die Steigung an, die eine Integralkurve dort hat. Die Hypotenuse eines Steigungsdreiecks entspricht also einer

Tangente an eine durch diesen Punkt gehende Kurve. Hat man das Richtungsfeld erstellt (das im allgemeinen dichter sein sollte als das Beispiel), so findet man eine geeignete Kurve, indem man die Hypotenusen der vorhandenen Steigungsdreiecke geeignet zu einer Gesamtkurve verbindet - wobei jeder x-Wert natürlich nur einmal berücksichtigt werden darf.

Aufgabe 9

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \frac{8}{\sin(\theta)} + 2\left(4 - 2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) \\ &= 8\sin^{-1}(\theta) + 8 - \frac{4\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'(\theta) &= -8\sin^{-2}(\theta)\cos(\theta) - \frac{-4\sin(\theta)\cdot\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\cdot\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{-8\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} + \frac{4(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))}{\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{-8\cos(\theta) + 4}{\sin^2(\theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E''(\theta) &= \frac{8\sin(\theta)\cdot\sin^2(\theta) - (-8\cos(\theta) + 4)\cdot 2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin^4(\theta)} \\ &= \frac{8\sin^3(\theta) + 16\sin(\theta)\cos^2(\theta) - 8\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin^4(\theta)} \\ &= \frac{8\sin(\theta)\cdot(\sin^2(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) + 2\cos^2(\theta))}{\sin^4(\theta)} \\ &= \frac{8(\sin^2(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) + 2\cos^2(\theta))}{\sin^3(\theta)} \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung: $E'(\theta) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{-8\cos(\theta) + 4}{\sin^2(\theta)} &= 0 \\ -8\cos(\theta) + 4 &= 0 \\ -8\cos(\theta) &= -4 \\ \cos(\theta) &= \frac{1}{2} \\ \theta &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: $E''(\theta_0 = \frac{\pi}{3}) > 0$

$$E''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{8\cdot\left((\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot(\frac{1}{2})^2\right)}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^3}$$
$$= \frac{8\cdot\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right)}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^3}$$
$$= \frac{8\cdot\left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^3}$$
$$= \frac{2\cdot(5-\sqrt{3})}{\frac{3\sqrt{3}}{8}} > 0$$

□

Der Winkel θ_0, unter die Taube minimale Energie verbraucht, ist also $\frac{\pi}{3}$.

Aufgabe 10