

Integrale auf Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^d

Tim Kröger

Oktober 2002

1 Berechnung der Integrale

Es geht hier um Oberflächenintegrale erster Art. Für diese spielt eine etwaige Orientierung der Mannigfaltigkeit keine Rolle.

Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit, $m < d$. Ferner sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ integrabel. (f kann auch Werte in einem \mathbb{R}^n haben, n beliebig, alle Integrale können dann ja komponentenweise betrachtet werden.) Das Lebesgue-Integral

$$\int_M f(x) dx$$

mit dem d -dimensionalen Lebesgue-Maß ist wenig interessant, denn weil M in \mathbb{R}^d eine Nullmenge ist, verschwindet das Integral. Man kann stattdessen jedoch das Integral mit dem natürlichen Flächenmaß der Fläche M betrachten. Meine persönlich favorisierte Schreibweise dafür ist

$$\int_M f(x) ds(x).$$

Andere Schreibweisen (zum Beispiel $\int_M f(x) dO$) sind möglich, ich halte es jedoch für vorteilhaft, wenn aus der Schreibweise hervorgeht, welches die Integrationsvariable ist.

Um das Oberflächenintegral berechnen zu können, benötigt man einen Atlas der Mannigfaltigkeit. Es sei hier angenommen, dass eine einzige Karte ausreicht, also

$$\varphi : U \rightarrow M$$

bijektiv und C^1 , wobei U offen im \mathbb{R}^m liegt. Dann ist

$$\int_M f(x) ds(x) = \int_U (f \circ \varphi)(y) \cdot \sqrt{\det((D\varphi)^T \cdot (D\varphi))} dy.$$

Man kann zeigen, dass dies unabhängig von der Wahl der Parametrisierung ist.

Als Merkhilfe kann die Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale dienen. Der Unterschied ist nur, dass $D\varphi$ im Falle von Mannigfaltigkeiten nicht quadratisch ist, so dass $|\det D\varphi|$ nicht erklärt ist. Stattdessen schreibt man dann $\sqrt{\det((D\varphi)^T(D\varphi))}$,

was immer definiert ist und für quadratische Matrizen mit dem anderen übereinstimmt. Die Frage, ob das Transponiert-Zeichen an die erste oder an die zweite Matrix zu setzen ist, ist auch leicht geklärt: Setzt man es nämlich an die zweite, so ist das Produkt eine $(d \times d)$ -Matrix mit Rang höchstens m , und damit verschwindet dann das ganze Integral. Es macht also nur Sinn, wenn die erste Matrix transponiert wird.

2 Unterschied zu Wegintegralen der Funktionentheorie

Im Falle $m = 1$, $d = 2$ ist auf diese Weise ein Integral über Kurven im \mathbb{R}^2 definiert. Ist nämlich $\gamma : (a, b) \rightarrow \Gamma$ eine Parametrisierung einer Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, so ist

$$\int_{\Gamma} f(x) ds(x) = \int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2} dt.$$

Identifiziert man \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} , so ist auch in der Funktionentheorie ein Wegintegral von f über Γ definiert, nämlich

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Dabei ist γ' komplexwertig, so dass (auch in dem Fall, dass f reellwertig ist) der Wert des Integrals im Allgemeinen eine komplexe Zahl ist. Bei entsprechender Identifikation ist der Wert des Integrals also ein Vektor im \mathbb{R}^2 , wohingegen der Wert des Integrals nach der oberen Formel eine reelle Zahl ist. Auch ist die obere Formel invariant gegenüber der Änderung der Durchlaufrichtung der Kurve, wohingegen das Wegintegral der Funktionentheorie bei Änderung der Durchlaufrichtung das Vorzeichen ändert.

3 Satz von Gauß

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und habe einen „gutartigen“ Rand (das soll hier nicht genauer spezifiziert werden). Ist dann $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, so gilt

$$\int_{\Omega} \partial_j f(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) \nu_j(x) ds(x),$$

wobei $\nu_j(x)$ die j -te Komponente der äußeren Normalen der Fläche $\partial\Omega$ im Punkt x ist. Die rechte Seite kann dabei gemäß der Formel aus Abschnitt 1 berechnet werden (was in der Praxis allerdings niemand macht).

Ist $g \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ mit Werten in \mathbb{R}^d (also in der gleichen Dimension, in der auch Ω lebt), so ergibt sich aus der obigen Formel durch Summation

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} g(x) dx = \int_{\partial\Omega} g(x) \cdot \nu(x) ds(x).$$

Dabei ist „ \cdot “ das Skalarprodukt und

$$\operatorname{div} g(x) = \nabla \cdot g(x) = \sum_{j=1}^d \partial_j g_j(x).$$