Universität Bremen **Fachbereich 3** **Sommersemester 2007**

Partielle Differenzialgleichungen I

Blatt 0

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

—

Aufgabe A: Geben Sie je ein sinnvolles Beispiel für eine offene, beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ so, dass

a) $u \in C(\Omega) \setminus C^1(\Omega)$,

b) $u \in C^1(\Omega) \setminus C^1_0(\Omega)$,

c) $u \in C^\infty_0(\Omega) \setminus \{0\}$,

d) $u \in (C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)) \setminus C^1(\overline{\Omega})$,

e) $u \in C^1(\overline{\Omega}) \setminus C^{1,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$,

f) $u \in C^{1,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega}) \setminus C^{1,1}(\overline{\Omega})$,

g) $u \in C^{1,1}(\overline{\Omega}) \setminus C^2(\overline{\Omega})$

ist. ($n = 1$ ist zulässig.)

—

Aufgabe B: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ auf Ω gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass u sich eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Funktion $\overline{u}$ auf $\overline{\Omega}$ mit derselben ε-δ-Beziehung fortsetzen lässt.

Druckfehler / Irrtum: Der Zusatz „mit derselben ε-δ-Beziehung“ ist zu streichen.

Lösung: Für $x \in \partial\Omega$ definiert man

$$\overline{u}(x) = \lim_{n\to\infty} u(x_n), \qquad \text{wobei } \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ und } x_n \in \Omega. \qquad (*)$$

Zu zeigen bleibt:

1. $\lim_{n\to\infty} u(x_n)$ existiert;
2. die Definition ist unabhängig von der Wahl der Folge;
3. $\overline{u}$ ist gleichmäßig stetig auf $\overline{\Omega}$.

Zum ersten Punkt: Wir zeigen, dass $(u(x_n))$ eine Cauchy-Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wir suchen N so, dass $|u(x_n) - u(x_m)| \le \varepsilon$ ist für alle $n, m \ge N$. Gemäß der gleichmäßigen Stetigkeit gibt es zu ε ein $\delta > 0$, und gemäß der Konvergenz

$x_n \to x$ gibt es dann wiederum ein N so, dass $|x_n - x| \le \delta/2$ für alle $n \ge N$. Sind nun $n, m \ge N$, so gilt

$$|x_n - x_m| \le |x_n - x| + |x - x_m| \le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

also wegen der gleichmäßigen Stetigkeit $|u(x_n) - u(x_m)| \le \varepsilon$ wie gefordert.

Zum zweiten Punkt: Sei (y_n) eine andere solche Folge. Es ist dann zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty}(u(x_n) - u(y_n)) = 0$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wir suchen N. Zu ε sei wieder $\delta > 0$ gemäß der gleichmäßigen Stetigkeit. Wir wählen dann N so groß, dass für $n \ge N$ jeweils $|x_n - x| \le \delta/2$ und $|y_n - x| \le \delta/2$. Für $n \ge N$ gilt dann

$$|x_n - y_n| \le |x_n - x| + |x - y_n| \le 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \delta,$$

also wieder $|u(x_n) - u(y_n)| \le \varepsilon$ wegen der gleichmäßigen Stetigkeit.

Zum dritten Punkt: Auf Ω ist natürlich $\overline{u} = u$ zu setzen, und wegen der Stetigkeit gilt $(*)$ dann auf ganz $\overline{\Omega}$. So kann man sich umständliche Fallunterscheidungen ersparen. Sei jetzt $\eta > 1$ fest (zum Beispiel $\eta = 2$). Sei $\overline{\varepsilon} > 0$ gegeben, und wir suchen $\overline{\delta} > 0$ so, dass für alle $x, y \in \overline{\Omega}$ gilt

$$|x - y| \le \overline{\delta} \qquad \Rightarrow \qquad |\overline{u}(x) - \overline{u}(y)| \le \overline{\varepsilon}. \tag{\#}$$

Zu $\varepsilon = \overline{\varepsilon}/\eta$ existiert nach der gleichmäßigen Stetigkeit von u auf Ω ein passendes $\delta > 0$. Wir setzen dann $\overline{\delta} = \delta/\eta$. Wir zeigen, dass $(\#)$ damit erfüllt ist. Seien $x, y \in \overline{\Omega}$ mit $|x - y| \le \overline{\delta}$ und (x_n) und (y_n) entsprechende Folgen gemäß $(*)$. Gemäß der Konvergenzen wählen wir N so groß, dass für $n \ge N$ gelten:

$$\begin{aligned} |x_n - x| &\le \frac{(\eta-1)\overline{\delta}}{2}, & \qquad |u(x_n) - \overline{u}(x)| &\le \frac{(\eta-1)\varepsilon}{2}, \\ |y_n - y| &\le \frac{(\eta-1)\overline{\delta}}{2}, & \qquad |u(y_n) - \overline{u}(y)| &\le \frac{(\eta-1)\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Für beliebiges $n \ge N$ ist dann

$$|x_n - y_n| \le |x_n - x| + |x - y| + |y - y_n| \le \overline{\delta}\left(\frac{2(\eta-1)}{2} + 1\right) = \overline{\delta}\eta = \delta,$$

also gemäß der gleichmäßigen Stetigkeit von u auf Ω

$$|u(x_n) - u(y_n)| \le \varepsilon,$$

und somit

$$\begin{aligned} |\overline{u}(x) - \overline{u}(y)| &\le |\overline{u}(x) - u(x_n)| + |u(x_n) - u(y_n)| + |u(y_n) - \overline{u}(y)| \\ &\le \varepsilon\left(\frac{2(\eta-1)}{2} + 1\right) = \varepsilon\eta = \overline{\eta}. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. $\square$

Universität Bremen **Fachbereich 3** **Sommersemester 2007**

Partielle Differenzialgleichungen I

Blatt 1

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Abgabe: Donnerstag, 26. April 2007, in den Übungen

—

Aufgabe 1: Transformieren Sie die folgenden Differenzialgleichungen in Normalform und klassifizieren Sie sie:

a) $-\partial_{xx}u - \partial_{xy}u - \partial_{yy}u + 7\partial_x u = 0,$ **[3 Punkte]**

b) $-\partial_{xx}u - 4\partial_{xy}u - 4\partial_{yy}u + 7\partial_x u = 0,$ **[3 Punkte]**

c) $-(x+1)\partial_{xx}u + 2x\partial_{xy}u - (x+1)\partial_{yy}u + x\partial_x u - x\partial_y u = 0.$ **[4 Punkte]**

—

Aufgabe 2 (Exponenzial-Trick): Gegeben sei die Differenzialgleichung (in Normalform)

$$\partial_{xx}u + \partial_{yy}u + 7\partial_x u + 8\partial_y u + 5u = x^2 + y^2.$$

Finden Sie eine Transformation, mit der man auch noch die ersten Ableitungen los wird.
Hinweis: Setzen Sie $v(x,y) = u(x,y)\exp(c_1 x + c_2 y)$ an und bestimmen Sie c_1 und c_2 geeignet. **[4 Punkte]**

—

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$\partial_{xyz}u = F(x,y,z),$$

wobei $F \in C(\mathbb{R}^3)$ eine gegebene Funktion ist. **[4 Punkte]**

Universität Bremen **Fachbereich 3** **Sommersemester 2007**

Partielle Differenzialgleichungen I

Blatt 2

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Abgabe: Freitag, 4. Mai 2007, in den Übungen

—

Aufgabe 4 (Herleitung der Wärmeleitungsgleichung): Im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und im Zeitintervall $(0, T)$ soll eine Gleichung für die Verteilung der Temperatur $u(x, t)$ hergeleitet werden. Dafür spielen die folgenden drei Materialparameter eine Rolle:

- die Wärmeleitfähigkeit $\lambda(x)$,
- die Dichte $\rho(x)$ (Verhältnis von Masse und Volumen) und
- die massenspezifische Wärmekapazität $c(x, u)$ (temperaturabhängig).

Diese Funktionen seien als hinreichend glatt vorausgesetzt, ebenso die Temperaturverteilung selbst. Der Wärmestrom (Transport von thermischer Energie) verläuft stets in Richtung des steilsten Temperaturabstiegs und ist proportional zur Wärmeleitfähigkeit. Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie in einem beliebigen Volumen $V \subset \Omega$ ergibt sich aus der durch den Rand von V herein- und hinaustransportierte Energie. Die massenspezifische Energie (also Energie pro Masse) in einem Punkt $x \in \Omega$ steht in einem direkten Zusammenhang zur Temperatur in diesem Punkt, das heißt sie ist eine Funktion der Temperatur, und ihre Ableitung nach der Temperatur ist die (massenspezifische) Wärmekapazität.

a) Leiten Sie aus diesen Angaben die Differenzialgleichung her, die u in Ω erfüllt. **[7 Punkte]**

b) Welche Glattheitsvoraussetzungen für λ, ρ, c sowie u sind erforderlich, damit die Herleitung so funktioniert? **[2 Punkte]**

c) Klassifizieren Sie diese Gleichung. **[1 Punkt]**

—

Aufgabe 5: Im Beweis von Satz 3 in Abschnitt 1.4 wird behauptet, die Gleichung

$$a(\partial_x \varphi)^2 + 2b\partial_x \varphi \partial_y \varphi + c(\partial_y \varphi)^2 = 0$$

sei äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$a\partial_x \varphi + \big(b + \sqrt{b^2 - ac}\big)\partial_y \varphi = 0, \qquad a\partial_x \varphi + \big(b - \sqrt{b^2 - ac}\big)\partial_y \varphi = 0$$

(das sind die Gleichungen (20), (21) und (22)), wobei auf dem betrachteten Gebiet $a \neq 0$ und $b^2 > ac$ sind. Beweisen Sie diese Äquivalenz und finden Sie dabei heraus, was eigentlich damit gemeint ist. **[3 Punkte]**

—

Aufgabe 6: Finden Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$-(1+x^2)^2\partial_{xx}u + \partial_{yy}u - 2x(1+x^2)\partial_x u = 0$$

auf einem möglichst großen Teilgebiet von $\mathbb{R}^2$, indem Sie wie folgt vorgehen:

- Stellen Sie fest, dass die Voraussetzunegn von Satz 3 in Abschnitt 1.4 erfüllt sind.
- Vollziehen Sie den Beweis des Satzes nach und schreiben Sie die Gleichungen (21) und (22) für diese Gleichung hin.
- Für jede diese zwei Gleichungen stellen Sie mit Hilfe von Lemma 3 in Abschnitt 1.5 eine Beziehung zu je einer gewöhnlichen Differenzialgleichung her.
- Finden Sie die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differenzialgleichungen. Lösen Sie diese Formeln nach der Integrationskonstanten auf. Das Ergebnis ist dann die Lösung der Differenzialgleichungn (21) beziehungsweise (22).
- Führen Sie die Koordinatentransformation durch.
- Lösen Sie die transformierte Gleichung (**Hinweis:** Aufgabe 3). Transformieren Sie die Lösung zurück.
- Machen Sie die Probe.

Geben Sie an, auf welchem Teilgebiet von $\mathbb{R}^2$ Ihre Lösungsformel gilt. **[5 Punkte]**

Partielle Differenzialgleichungen I

Blatt 3

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Abgabe: Freitag, 11. Mai 2007, in den Übungen

—

Aufgabe 7 (Lemma 3, Abschnitt 1.5): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet (also offen und zusammenhängend) und $f \in C(\Omega)$. Betrachtet werde die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Sei ferner $\Omega' \subset \Omega$ ein Teilgebiet und $u \in C^1(\Omega')$. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

- Für jede Lösung y der gewöhnlichen Differenzialgleichung ist $u(x, y(x))$ auf jedem Intervall I, auf dem es definiert ist, konstant (u ist erstes Integral).
- u ist Lösung der partiellen Differenzialgleichung $\partial_x u + f\partial_y u = 0$. **[3 Punkte]**

—

Aufgabe 8: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und $u \in C^\omega(\Omega)$ (also u reell-analytisch auf Ω, das heißt jeder Punkt in Ω hat eine Umgebung, auf der die Taylor-Reihe von u gegen u konvergiert). Zeigen Sie, dass u allein durch alle Ableitungen (einschließlich der nullten) in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ eindeutig bestimmt ist. **[4 Punkte]**

Lösung: Seien also u_1 und u_2 in Ω reell-analytisch, und in x_0 stimmen die Taylor-Reihen von u_1 und u_2 überein. Zu zeigen ist, dass $u_1 = u_2$ auf Ω ist. Sei $u = u_1 - u_2$, dann verschwindet die Taylor-Reihe von u in x_0, und es ist zu zeigen, dass u identisch verschwindet.

Jedenfalls verschwindet u auf einer Umgebung von x_0, weil es dort Grenzwert seiner Taylor-Reihe ist. Sei $V \subset \Omega$ die Menge jener Punkte, die eine Umgebung besitzen, auf der u verschwindet. V ist offen und enthält x_0.

Falls $V = \Omega$ ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also $V \neq \Omega$, und wir müssen dies zum Widerspruch führen.

Wenn aber $V \neq \Omega$ ist, dann existiert freilich ein $x_1 \in \Omega \setminus V$. Dazu gibt es einen Verbindungsweg γ von x_0 und x_1 in Ω, weil Ω zusammenhängend ist. Auf diesem Weg gibt es einen Punkt $\overline{x} = \gamma(\overline{t}) \in \partial V$ (nämlich $\overline{t} = \sup\{t : \gamma(t) \in V\}$). Jede Umgebung von $\overline{x}$ enthält Punkte aus V, in denen somit alle Ableitungen von u verschwinden. Da sämtliche Ableitungen stetig sind, müssen sie auch in $\overline{x}$ verschwinden. Somit ist die Taylor-Reihe von u in $\overline{x}$ identisch null, und somit verschwindet u in einer Umgebung von $\overline{x}$. Jedoch enthält jede Umgebung von $\overline{x}$ auch Punkte aus $\Omega \setminus V$ und somit Punkte, in denen u nicht verschwindet. Das ist ein Widerspruch. $\square$

—

Aufgabe 9:

a) Auf $\Omega = \mathbb{R}^2$ sei die Differenzialgleichung

$$\partial_{xx}u + \partial_{yy}u = 0$$

gegeben. Klassifizieren Sie diese Gleichung. Überprüfen Sie, ob und wo die Menge $S = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ charakteristisch ist. Falls nirgendwo, finden Sie lokal um S die eindeutige Lösung u, die auf S die Bedingungen $u = \frac{1}{k}\cos kx$ und $\partial_y u = 0$ erfüllt. Lässt sich diese Lösung reell-analytisch auf ganz $\mathbb{R}^2$ fortsetzen? Wenn jetzt $k \to \infty$ geht, konvergiert die Folge der Lösungen dann (lokal und / oder global) gegen das Erwartete?

Falls S charakteristisch ist, untersuchen Sie, ob es trotzdem eine eindeutige reell-analytische Lösung des Problems gibt. **[3 Punkte]**

Druckfehler / Irrtum: Falls S charakteristisch ist, war es so gemeint, dass man untersuchen sollte, ob die Differenzialgleichung *mit den Anfangsbedingungen* eine eindeutige reell-analytische Lösung hat. Das war missverständlich formuliert.

b) Analog für die Differenzialgleichung $-\partial_{xx}u + \partial_{yy}u = 0$. **[3 Punkte]**

c) Analog für die Differenzialgleichung $-\partial_{xx}u + \partial_{y}u = 0$. **[3 Punkte]**

Partielle Differenzialgleichungen I

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Blatt 4

Abgabe: Freitag, 18. Mai 2007, in den Übungen

—

Aufgabe 10: Geben Sie auf dem Einheitskreis $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ eine lineare partielle Differenzialgleichung mit stetigen Koeffizienten an, die dort elliptisch, aber nicht gleichmäßig elliptisch ist. **[2 Punkte]**

—

Aufgabe 11 (Korrektheit und Einzigkeit für ein Dirichlet-Problem):

a) Beweisen Sie Satz 5 in Abschnitt 3.2. **[3 Punkte]**

b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass auf Bedingung (7) nicht verzichtet werden kann. In Worten: Die Lösung des Dirichlet-Problems ist nicht notwendig eindeutig, wenn die Bedingung $c(x) \leq 0$ nicht erfüllt ist. **Hinweis:** $n = 1$ ist zulässig. **[3 Punkte]**

—

Aufgabe 12 (Korrektheit und Eingzigkeit für ein Robin-Problem): Wir betrachten eine elliptische Differenzialgleichung auf einem beschränkten Gebiet Ω, aber statt der Dirichlet-Randbedingungen $u = \varphi$ betrachten wir die Robin-Randbedingungen

$$(\nabla u)^{\mathrm{T}} A \nu + hu = \psi \qquad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei A die Matrix der Koeffizienten a_{ij} der zweiten Ableitungen ist, ν der äußere Normal und $h, \psi \in C(\partial\Omega)$ gegebene Funktionen. Ferner sei vorausgesetzt, dass $h(x) > 0$ ist auf $\partial\Omega$. Außerdem muss Ω ein C^1-Gebiet sein.

a) Formulieren und beweisen Sie einen analogen Satz zu Satz 1 aus Abschnitt 3.2. **[4 Punkte]**

b) Formulieren und beweisen Sie einen analogen Satz zu Satz 3 aus Abschnitt 3.2. Dabei soll der Faktor, der dem γ entspricht, unabhängig von u, ψ und f sein, darf aber insbesondere von h abhängen. **[5 Punkte]**

c) Formulieren und beweisen Sie einen analogen Satz zu Satz 5 aus Abschnitt 3.2. **[3 Punkte]**

—

Aufgabe 13 (Modellierung von Robin-Bedingungen): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Eine stationäre (das heißt zeitunabhängige) Temperaturverteilung in einem homogenen Medium wird durch die Differenzialgleichung

$$\Delta u = 0$$

modelliert (vergleiche auf Aufgabe 4 mit konstanten Materialparametern und $\partial_t u = 0$). Dirichlet-Randbedingungen ($u = \varphi$ auf $\partial\Omega$) entsprechen physikalisch dem Konstanthalten der Temperatur am Rande. Heizen oder Kühlen mit konstanter Energiezufuhr entspricht Neumann-Randbedingngen ($\nabla u \cdot \nu = \varphi$ auf $\partial\Omega$, wobei $\varphi > 0$ für Heizen und $\varphi < 0$ für Kühlen steht). In der Realität kann man nicht unbedingt eine feste Temperatur halten. Man kann dem jedoch nahe kommen, indem man heizt oder kühlt mit einer Energiezu- beziehunsgweise -abfuhr, die proportional zur Abweichung von der Zieltemperatur ist. Modellieren Sie die entsprechenden Randbedingungen. Untersuchen Sie dabei, ob die Vorzeichenbedingung aus Aufgabe 12 (also $h > 0$) erfüllt ist. **[3 Punkte]**

Partielle Differenzialgleichungen I

Blatt 5

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Abgabe: Freitag, 25. Mai 2007, in den Übungen

—

Aufgabe 14: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie eine Richtung der Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- u ist subelliptisch zum Operator $L = \Delta$ gemäß Definition 6 im Abschnitt 3.2 (das heißt $-\Delta u \leq 0$ in Ω).
- u ist subharmonisch gemäß Definition 2 im Abschnitt 3.5 (das heißt, jede auf einer ganz in Ω enthaltenen Kugel harmonische Funktion h, die auf dem Rand der Kugel $\geq u$ ist, ist auf der ganzen Kugel $\geq u$).

(Damit keine Missverständnisse entstehen: Die Aussagen sind äquivalent; um volle Punktzahl zu erhalten, braucht aber nur eine der zwei Richtungen gezeigt zu werden – egal welche.) **[5 Punkte]**

—

Aufgabe 15 (Eindeutigkeit für gemischte Randwertaufgabe): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes $C^{0,1}$-Gebiet, und sei der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ in zwei disjunkte (messbare) Teile Γ_1 und Γ_2 unterteilt. $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ seien Lösungen des folgenden Laplace-Problems mit gemischen Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, && \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi, && \text{auf } \Gamma_1, \\ \nabla u \cdot \nu &= \psi, && \text{auf } \Gamma_2, \end{aligned}$$

wobei $\varphi, \psi \in C(\Gamma)$ und $f \in C^(\overline{\Omega})$.

Druckfehler / Irrtum: Man muss noch voraussetzen, dass Ω zusammenhängend ist.

a) Zeigen Sie, dass u_1 und u_2 sich höchstens um eine Konstante unterscheiden. **Hinweis:** Lemma 2 in Abschnitt 3.3. **[3 Punkte]**

b) Zeigen Sie, dass $u_1 = u_2$ ist, sofern $\Gamma_1 \neq \{\}$ (Eindeutigkeit der Lösung). **[1 Punkt]**

c) Falls $\Gamma_1 = \{\}$ ist, zeigen Sie, dass es nur dann eine (klassische) Lösung geben kann, wenn

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Gamma \psi(x)\,ds(x)$$

ist. **[2 Punkte]**

—

Aufgabe 16 (Stetige Abhängigkeit für gemischte Randwertaufgabe):

a) Sei $\Omega = (0,1)^n$ der n-dimensionale Einheitswürfel. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C < \infty$ gibt so, dass

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

gilt für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$, die die Bedingung $u(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$ erfüllen (Poincaré-Friedrichssche Ungleichung). **Hinweis:** Stellen Sie $u(x)$ mittels des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung geeignet dar; wenden Sie dann die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in der Form $(\int ab)^2 \leq \int a^2 \int b^2$ mit $a = 1$ an. Integrieren Sie die erhaltene Abschätzung für $u(x)^2$ über Ω und schätzen Sie weiter ab. **[4 Punkte]**

b) Beweisen Sie in der Situation von Aufgabe 15 für den Spezialfall $\Omega = (0,1)^n$ und $\Gamma_1 \supset \{0\} \times (0,1)^{n-1}$ stetige Abhängigkeit der Lösung von f (bei festen φ und ψ) in einer Norm Ihrer Wahl. **Hinweis:** Wie verallgemeinert sich Lemma 2 im Fall, dass die Funktionen nicht harmonisch sind? **[4 Punkte]**

Partielle Differenzialgleichungen I

Blatt 6

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Abgabe: Freitag, 1. Juni 2007, in den Übungen

—

Aufgabe 17:

a) Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion $f(x) = x$ auf $[-\pi, \pi]$. **[3 Punkte]**

b) Berechnen Sie daraus den Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie mit dem Computer geeignete Partialsummen berechnen. **[3 Punkte]**

—

Aufgabe 18: Sei $y : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ periodisch und hinreichend glatt und habe die Fourier-Koeffizienten a_0, a_k, b_k.

a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von $y'(x)$. **[2 Punkte]**

b) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von $y(x)\sin x$. **[2 Punkte]**

—

Aufgabe 19: Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$y''(x) + \sin x \cdot y'(x) - 5y(x) = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{9}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 3x, \quad y(-\pi) = y(\pi) = 0.$$

a) Warum wissen Sie, dass es höchstens eine klassische Lösung geben kann? **[1 Punkt]**

b) Finden Sie diese Lösung, indem Sie mit Hilfe von Aufgabe 18 Bedingungen an die Fourier-Koeffizienten herleiten. **Hinweis:** Kümmern Sie sich nicht mehr um Eindeutigkeit und probieren Sie, ob eine abbrechende Fourier-Reihe ausreicht. **[5 Punkte]**

Universität Bremen | Fachbereich 3 | Sommersemester 2007

Partielle Differenzialgleichungen I

Blatt 7

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Abgabe: Freitag, 8. Juni 2007, in den Übungen

—

Aufgabe 20: Lösen Sie auf $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\partial_{xx}u - \partial_{yy}u &= 0, \\ u(0,y) &= 0, & u(x,0) &= 0, \\ u(1,y) &= 0, & u(x,1) &= x - x^3 \end{aligned}$$

mit der Fourier-Methode (Separationsansatz). Es genügt, wenn Sie die Fourierreihe der Lösung angeben und ihre Konvergenz zeigen. **[6 Punkte]**

—

Aufgabe 21: Versuchen Sie, mit einem ähnlichen Ansatz die Differenzialgleichung

$$-\partial_{xx}u + \partial_{yy}u = 0 \qquad \text{oder} \qquad -\partial_{xx}u + \partial_{y}u = 0$$

(jeweils mit denselben Randbedingungen wie in Aufgabe 20) zu lösen. (Das heißt, suchen Sie sich eine dieser beiden Gleichungen aus.) Was passiert? **[4 Punkte]**

—

Aufgabe 22 (Fredholmsche Alternative):

a) Beweisen Sie die Fredholmsche Alternative für *endlichlichdimensionale* Hilberträume (Satz 2 im Abschnitt 5.1 mit $H = \mathbb{K}^n$). **[4 Punkte]**

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass im unendlichdimensionalen Fall auf die Kompaktheitsvoraussetzung nicht verzichtet werden kann. **Hinweis:** Zum Beispiel mit $H = l^2$ (Raum aller quadratsummierbaren Folgen in $\mathbb{R}$). **[3 Punkte]**

Partielle Differenzialgleichungen I

Blatt 8

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Abgabe: Freitag, 15. Juni 2007, in den Übungen

—

Aufgabe 23: Finden Sie mittels der Fourier-Methode die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= (x-x^3)(y-y^3), && (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) &= 0, && (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

auf $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Es genügt, wenn Sie die Fourierreihe der Lösung angeben.

[5 Punkte]

—

Aufgabe 24: Beweisen Sie Satz 1 im Abschnitt 5.2 (Stetigkeit des Fredholmschen Integraloperators mit stetigem Kern). Geben Sie dabei eine Schranke für die Operatornorm von K an. **[5 Punkte]**

—

Aufgabe 25: In dieser Aufgabe darf die (intuitiv einleuchtende) Formel

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n :\, a \le |x| \le b\}} f(x)\,dx = \int_a^b \int_{\{x \in \mathbb{R}^n :\, |x| = r\}} f(x)\,ds(x)\,dr$$

benutzt werden; sie gilt für $0 \le a \le b \le \infty$ und eine beliebige Funktion f auf dem $\mathbb{R}^n$, die die Voraussetzungen des Satzes von Fubini erfüllt (nämlich f messbar und auf der angegebenen Menge entweder integrabel oder ≥ 0).

a) Es sei $k_\alpha(x) = 1/|x|^\alpha$ (auf dem $\mathbb{R}^n$). Zeigen Sie, dass $\int_{B_1(0)} k_\alpha(x)\,dx$ genau dann endlich ist, wenn $\alpha < n$ ist. Zeigen Sie außerdem, dass $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} k_\alpha(x)\,dx$ genau dann endlich ist, wenn $\alpha > n$ ist. **[4 Punkte]**

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \ge 2$ die Grundlösung $E_n(x)$ der Laplace-Gleichung lokal integrabel ist. **[2 Punkte]**

Universität Bremen **Fachbereich 3** **Sommersemester 2007**

Partielle Differenzialgleichungen I

Blatt 9

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Abgabe: Freitag, 22. Juni 2007, in den Übungen

—

Aufgabe 26 (Fouriertransformation auf unbeschränktem Gebiet): Für jedes $f \in L^1(\mathbb{R})$ (mit Werten in $\mathbb{C}$) ist die Fouriertransformierte definiert gemäß

$$\hat{f}(\xi) = (Ff)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx.$$

Es ist $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$. Ist sogar $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, so ist $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, und es gilt die Umkehrformel

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(-x).$$

a) Sei $f \in C_0^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: $(Ff')(\xi) = i\xi(Ff)(\xi)$. **[3 Punkte]**

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx} u &= 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Lösen Sie dieses, indem Sie es im Ort fouriertransformieren, dann die entstehende Schar gewöhnlicher Differenzialgleichungen lösen und schließlich die Lösung rücktransformieren. Es genügt, wenn Sie $u(x,t)$ als Doppelintegral hinschreiben und beweisen, dass es existiert. **[5 Punkte]**

—

Aufgabe 27 (Doppelschichtpotenzial bei nicht-stetigem Rand):

a) Aus den Lemmas 7 und 8 im Abschnitt 5.3 ergab sich (siehe Vorlesung) eine Abschätzung der Art

$$|\nabla E_n(x-\xi) \cdot \nu(\xi)| \leq \frac{c}{|x-\xi|^{n-1-\lambda}}$$

für $x, \xi \in \partial\Omega$ und $|x-\xi|$ hinreichend klein, wobei $\lambda > 0$ und $c < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit hinreichend glattem Rand.

Betrachten Sie jetzt $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^n$, was nicht hinreichend glatt ist (nämlich nur $\Omega \in C^{0,1}$). Zeigen Sie, dass in der Tat eine Abschätzung wie oben nicht mehr gilt. **[3 Punkte]**

Druckfehler / Irrtum: Das angegebene Ω liegt natürlich in $\mathbb{R}^2$, nicht $\mathbb{R}^n$ (mit anderen Worten: $n = 2$).

b) Zeigen Sie, dass auch die entsprechende Aussage von Satz 9 über das Doppelschichtpotenzial für diese Menge Ω nicht mehr gilt. Mit anderen Worten, finden Sie ein passendes $h \in L^\infty(\partial\Omega)$, für das das Doppelschichtpotenzial W nicht auf $\partial\Omega$ stetig ist (oder vielleicht gar nicht existiert). **[5 Punkte]**

Partielle Differenzialgleichungen I

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Blatt 10

Abgabe: Freitag, 29. Juni 2007, in den Übungen *oder* bis Donnerstag, 28. Juni 2007, in Postfach Nr. 160 im MZH

—

Aufgabe 28 (Spiegelung am Kreis): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, aber nicht notwendig beschränkt, wobei $0 \notin \Omega$. Sei ferner $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch und

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \qquad x \mapsto \frac{Rx}{|x|^2}$$

mit festem $R > 0$.

a) Zeigen Sie, dass $u \circ \varphi$ auf seinem Definitionsbereich harmonisch ist. **[3 Punkte]**

b) Sei nun zusätzlich $\Omega \supset \{x : |x| > r\}$ für ein $r > 0$ und u auf $\{x : |x| > r\}$ beschränkt. Somit enthält das Definitionsgebiet von $u \circ \varphi$ die Menge $\{x : |x| < R/r\} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $u \circ \varphi$ sich in den Nullpunkt harmonisch fortsetzen lässt. **Hinweis:** Identifizieren Sie $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ und interpretieren Sie $v = u \circ \varphi$ als Realteil einer komplexwertigen Funktion. Wählen Sie den Imaginärteil w so, dass die Gesamtfunktion $f = (v, w)$ holomorph ist; definieren Sie dazu $w(x)$ als geeignetes Wegintegral von einem festen Punkt x^* nach x und zeigen Sie, dass die Definition unabhängig von der Wahl des Weges ist und dass das Paar (v, w) die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllt. Wenden Sie dann ein Ergebnis aus der Funktionentheorie an, um f holomorph in den Nullpunkt fortzusetzen. **[5 Punkte]**

—

Aufgabe 29:

a) Beweisen Sie, dass für $n \geq 2$ die innere und äußere Dirichlet-Aufgabe im Sinne von Abschnitt 5.4 jeweils höchstens eine Lösung haben. Mit anderen Worten: Schließen Sie die Lücken im Beweis von Satz 2. **Hinweis:** Maximumprinzip (Satz 7 im Abschnitt 3.2; für $n = 2$ außerdem Aufgabe 28. **[4 Punkte]**

b) Gilt die Aussage des Satzes auch für $n = 1$? **[2 Punkte]**

Partielle Differenzialgleichungen I

Blatt 11

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Abgabe: Freitag, 6. Juli 2007, in den Übungen

—

Aufgabe 30: Zeigen Sie, dass die Integralgleichungen, die sich im Abschnitt 5.4 für das innere Neumann- und das äußere Dirichlet-Problem ergeben, (das sind die Gleichungen (34) und (37)) zueinander konjugiert sind. Passen Sie dabei genau auf die Vorzeichen auf. **[4 Punkte]**

—

Aufgabe 31 (Eigenschaften der Green-Funktion): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Beweisen Sie:

a) Die Green-Funktion G_n auf Ω ist eindeutig besimmt. **[3 Punkte]**

b) Für $x \in \overline{\Omega}$ und $\xi \in \Omega$ mit $x \neq \xi$ ist $G_n(x, \xi) \geq 0$. **[3 Punkte]**

—

Aufgabe 32 (Green-Funktion in einer Raumdimension):

a) Erläutern Sie, warum man die Funktion $E_1(x) = -|x|/2$ als Fundamentallösung für die Laplace-Gleichung in einer Raumdimension ansehen kann. **[2 Punkte]**

b) Bestimmen Sie die Green-Funktion für das eindimensionale Intervall $I = (0, 1)$. Überprüfen Sie die Symmetrie der Greenfunktion. **[3 Punkte]**

c) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Green-Funktion die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -u''(x) &= e^x, & x \in (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

[3 Punkte]

Universität Bremen **Fachbereich 3** **Sommersemester 2007**

Partielle Differenzialgleichungen I

Blatt 12

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Abgabe: Freitag, 13. Juli 2007, in den Übungen

—

Aufgabe 33 (Green-Funktion für den Halbkreis): Bestimmen Sie die Green-Funktion für den Halbkreis

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0 \text{ und } |x| < 1\}.$$

Hinweis: Bemerkung 4 im Abschnitt 5.5 (Green-Funktion für Halbraum) sowie Aufgabe 28 (Spiegelung harmonischer Funktionen am Kreis). **[6 Punkte]**

—

Aufgabe 34: Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned}
-\partial_{xx}u + \partial_{yy}u &= 0, && (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1),\\
u(0,y) = u(1,y) &= 0, && y \in (0,1),\\
u(x,0) &= x - x^3, && x \in (0,1),\\
\partial_x u(x,0) &= 0, && x \in (0,1)
\end{aligned}$$

mit der Fourier-Methode. Was passiert, wenn man die Anfangswerte zu $y = 1$ statt zu $y = 0$ fordert? **[4 Punkte]**

Druckfehler / Irrtum: In der letzten Anfangsbedingung muss es ∂_y heißen statt ∂_x, also

$$\partial_y u(x,0) = 0, \qquad x \in (0,1).$$

—

Aufgabe 35: Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned}
-\partial_{xx}u + \partial_{y}u &= 0, && (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1),\\
u(0,y) = u(1,y) &= 0, && y \in (0,1),\\
u(x,0) &= x - x^3, && x \in (0,1)
\end{aligned}$$

mit der Fourier-Methode. Was passiert, wenn man die Anfangswerte zu $y = 1$ statt zu $y = 0$ fordert? **[4 Punkte]**

Partielle Differenzialgleichungen I

Blatt 13

Dr. Michael Wolff – Dr. Tim Kröger

Freiwilliges Ferienblatt

—

Aufgabe 36: Lösen Sie die Differenzialgleichung

$$x_1\partial_1\varphi + x_2\partial_2\varphi + \partial_3\varphi - \varphi = 0$$

mit den Anfangswerten

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, 0) = \xi_1 - \xi_2^2.$$

(Es ist Absicht, dass vor dem $\partial_3\varphi$ kein x_3 steht.)

—

Aufgabe 37: Denken Sie sich selbst weitere quasilineare Differenzialgleichungen erster Ordnung aus und lösen Sie diese.