Zusammengesetzte Finite Elemente für trabekuläre Mikrostrukturen

Lars Ole Schwen

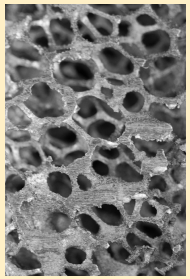
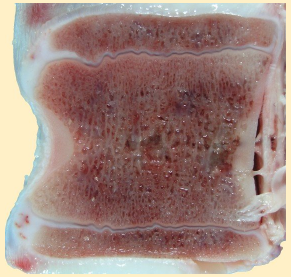
Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

in Zusammenarbeit mit: Martin Rumpf (INS Bonn)
Tobias Preusser (MEVIS Bremen)
Hans-Joachim Wilke, Uwe Wolfram (UFB Ulm)
Stefan Sauter (Uni Zürich)

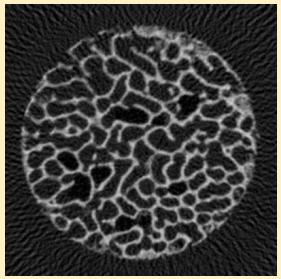
Promotionskolloquium
Bonn, 2010-10-07

Vorschau

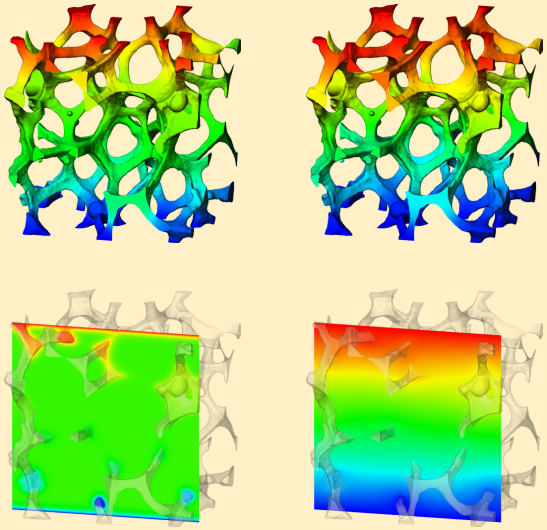
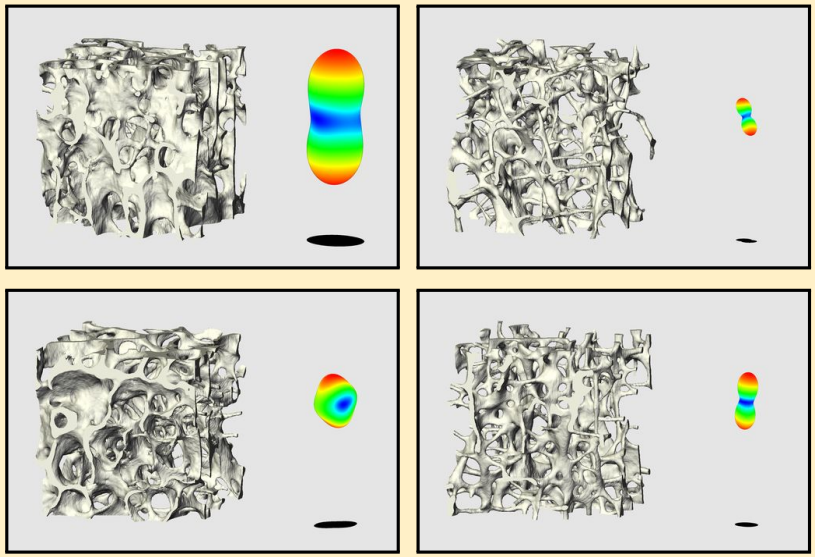
- trabekuläre Geometrien: Aluminium-Schäume, Knochen

↓ µCT scan



- effiziente Simulation: Wärmeleitung, lineare Elastizität

- Hintergrund: Osteoporose, Vertebroplastie

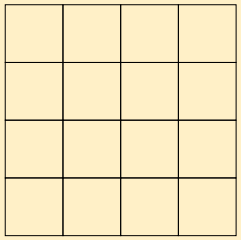
Übersicht

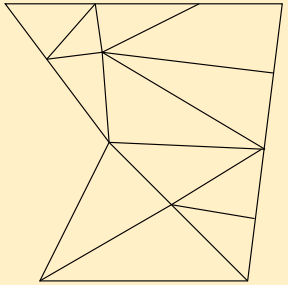
1 CFE für komplizierte Gebiete

2 CFE für springende Koeffizienten

3 Homogenisierung

Finite Elemente

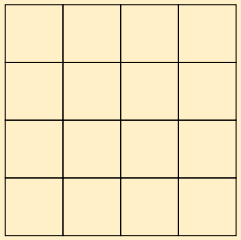


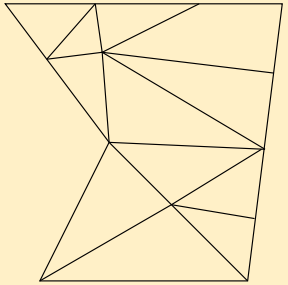


klassische Finite Elemente

- strukturierte Gitter (effizient, mit Gitterhierarchie)
- unstrukturierte Gitter (geometrisch flexibel)

Finite Elemente

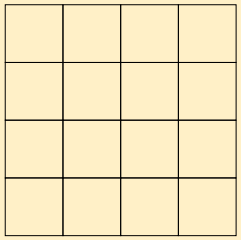


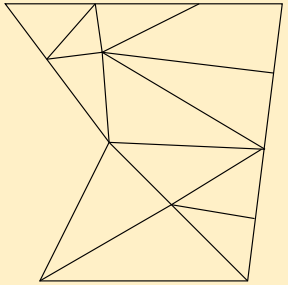


klassische Finite Elemente

- strukturierte Gitter (effizient, mit Gitterhierarchie)
- unstrukturierte Gitter (geometrisch flexibel)
  benutzen kompliziertes Gitter mit einfachen Basisfunktionen

Finite Elemente





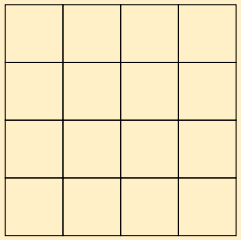
klassische Finite Elemente

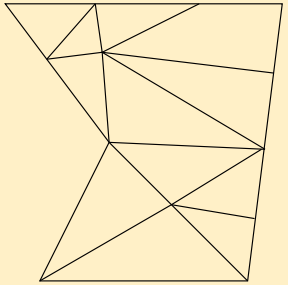
- strukturierte Gitter (effizient, mit Gitterhierarchie)
- unstrukturierte Gitter (geometrisch flexibel)
  benutzen kompliziertes Gitter mit einfachen Basisfunktionen

zusammengesetzte Finite Elemente (CFE) [Hackbusch, Sauter]

- kombinieren Vorteile beider Ansätze

Finite Elemente





klassische Finite Elemente

- strukturierte Gitter (effizient, mit Gitterhierarchie)
- unstrukturierte Gitter (geometrisch flexibel)
  benutzen kompliziertes Gitter mit einfachen Basisfunktionen

zusammengesetzte Finite Elemente (CFE) [Hackbusch, Sauter]

- kombinieren Vorteile beider Ansätze
- benutzen einfaches Gitter mit komplizierten Basisfunktionen

Alternative Ansätze

- fictitious domain methods
- generalized FE (GFEM), extended FE (XFEM)
- immersed interface methods
- partition of unity methods
- unfitted meshes
- weighted extended B-splines (WEB-Splines)

Alternative Ansätze

- fictitious domain methods
- generalized FE (GFEM), extended FE (XFEM)
- immersed interface methods
- partition of unity methods
- unfitted meshes
- weighted extended B-splines (WEB-Splines)

Fokus der CFE:

- Gebiet beschrieben durch Bilddaten (z. B. µCT-Scans)
  - Voxeldaten definieren Würfelgitter
  - nicht direkt für CAD-Anwendungen
- keine zusätzlichen Freiheitsgrade
- für Homogenisierungs-Anwendungen (auf quaderförmigen Gebieten)

Übersicht

1 CFE für komplizierte Gebiete

2 CFE für springende Koeffizienten

3 Homogenisierung

- Liehr, Preusser, Rumpf, Sauter, S., Comp Vis Sci **12** ('09)
- Preusser, Rumpf, S., Proc. FEM-Workshop Ulm '07
- Wolfram, S., Simon, Rumpf, Wilke, J Biomech **42** ('09)

CFE-Konstruktion in 1D

Angenommen, wir kennen die Position des Interface.

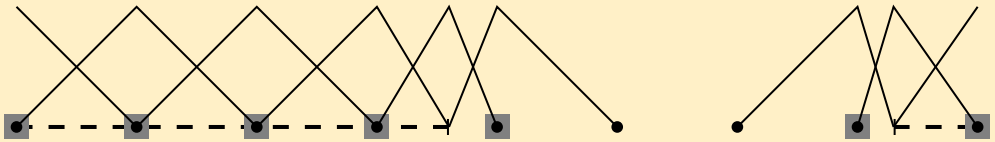
- Freiheitsgrade ■ liegen auf regelmäßigem Gitter

CFE-Konstruktion in 1D

Angenommen, wir kennen die Position des Interface.

- Freiheitsgrade ■ liegen auf regelmäßigem Gitter

- Aus Standard-Basisfunktionen auf einem »virtuellen Gitter« . . .

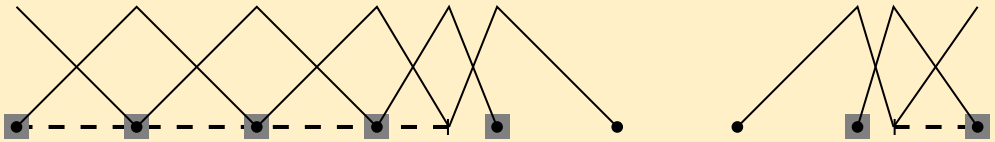


CFE-Konstruktion in 1D

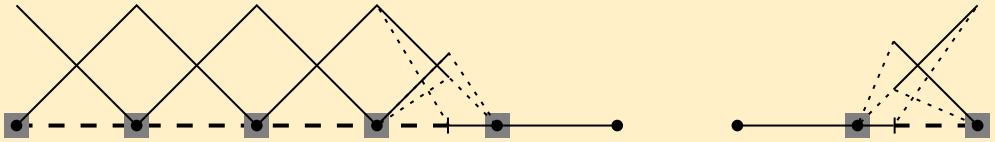
Angenommen, wir kennen die Position des Interface.

- Freiheitsgrade ■ liegen auf regelmäßigem Gitter

- Aus Standard-Basisfunktionen auf einem »virtuellen Gitter« ...



- ... setzen wir CFE-Basisfunktionen zusammen, ...



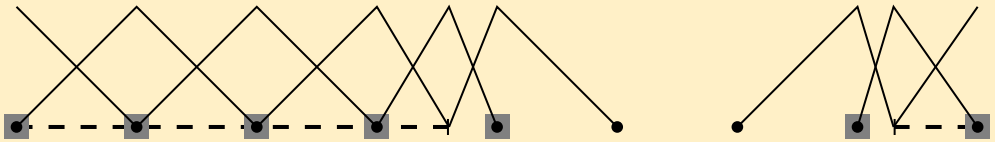
... die auf das Innere eingeschränkt werden

CFE-Konstruktion in 1D

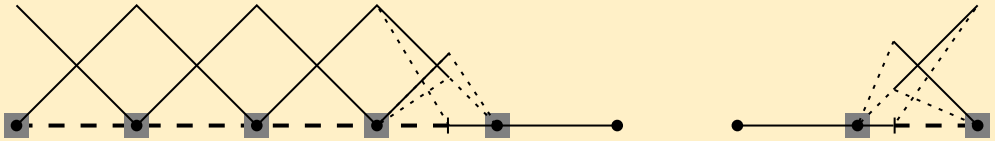
Angenommen, wir kennen die Position des Interface.

- Freiheitsgrade ■ liegen auf regelmäßigem Gitter

- Aus Standard-Basisfunktionen auf einem »virtuellen Gitter« ...



- ... setzen wir CFE-Basisfunktionen zusammen, ...



... die auf das Innere eingeschränkt werden:

$$\psi_r^{\mathrm{CFE}} = \sum_{z \in \mathbb{D}(r)} \mathfrak{w}_{z,r} \psi_z^{\triangle} \chi_{\Omega_-^{\triangle}} \qquad r \in \mathcal{N}^{\square}, \mathbb{D}(r) \subset \mathcal{N}^{\triangle}$$

mit Gewichten gegeben durch geometrische Schnittverhältnisse

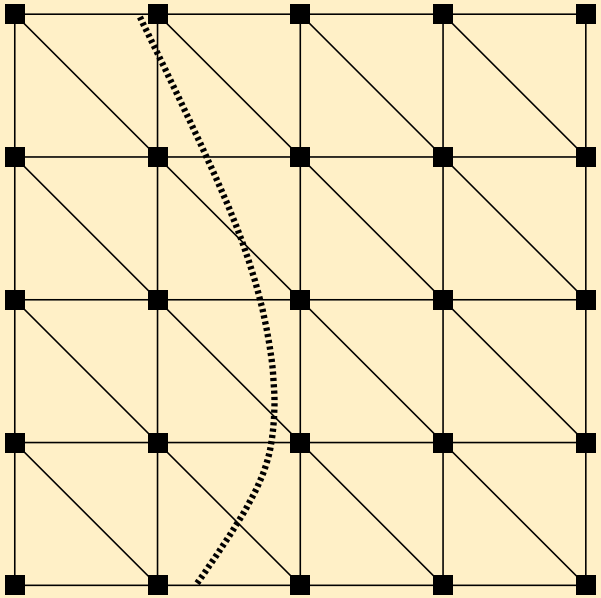
CFE-Konstruktion in 2D

- Zusammensetzen entspricht Quadratur abgeschnittener Basisfunktionen
- Implementierung, Analogie zu springenden Koeffizienten (später)

CFE-Konstruktion in 2D

- Zusammensetzen entspricht Quadratur abgeschnittener Basisfunktionen
- Implementierung, Analogie zu springenden Koeffizienten (später)

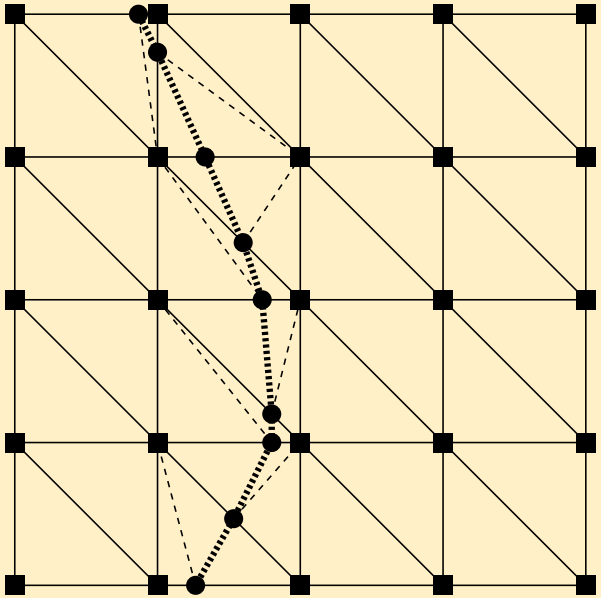
Interfaces in 2D:



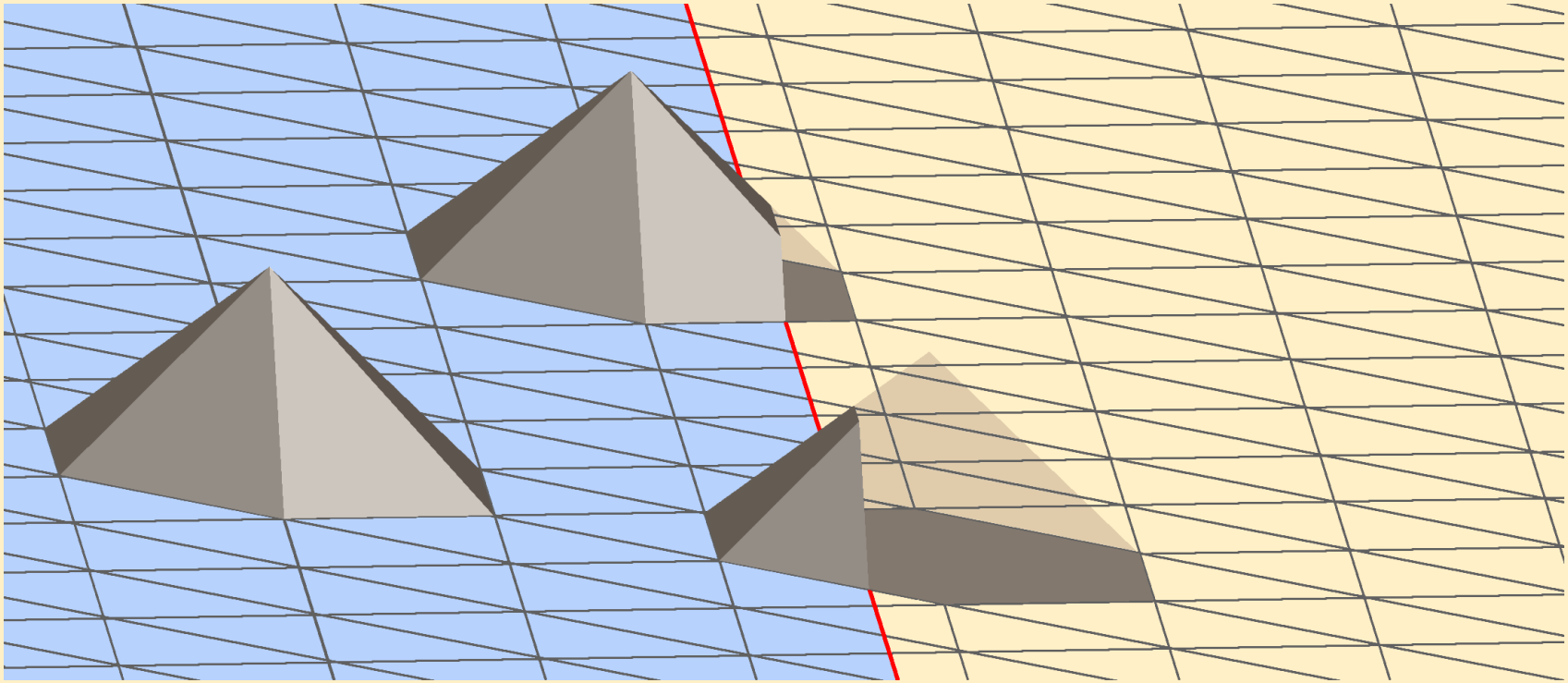
CFE-Konstruktion in 2D

- Zusammensetzen entspricht Quadratur abgeschnittener Basisfunktionen
- Implementierung, Analogie zu springenden Koeffizienten (später)

Interfaces in 2D:

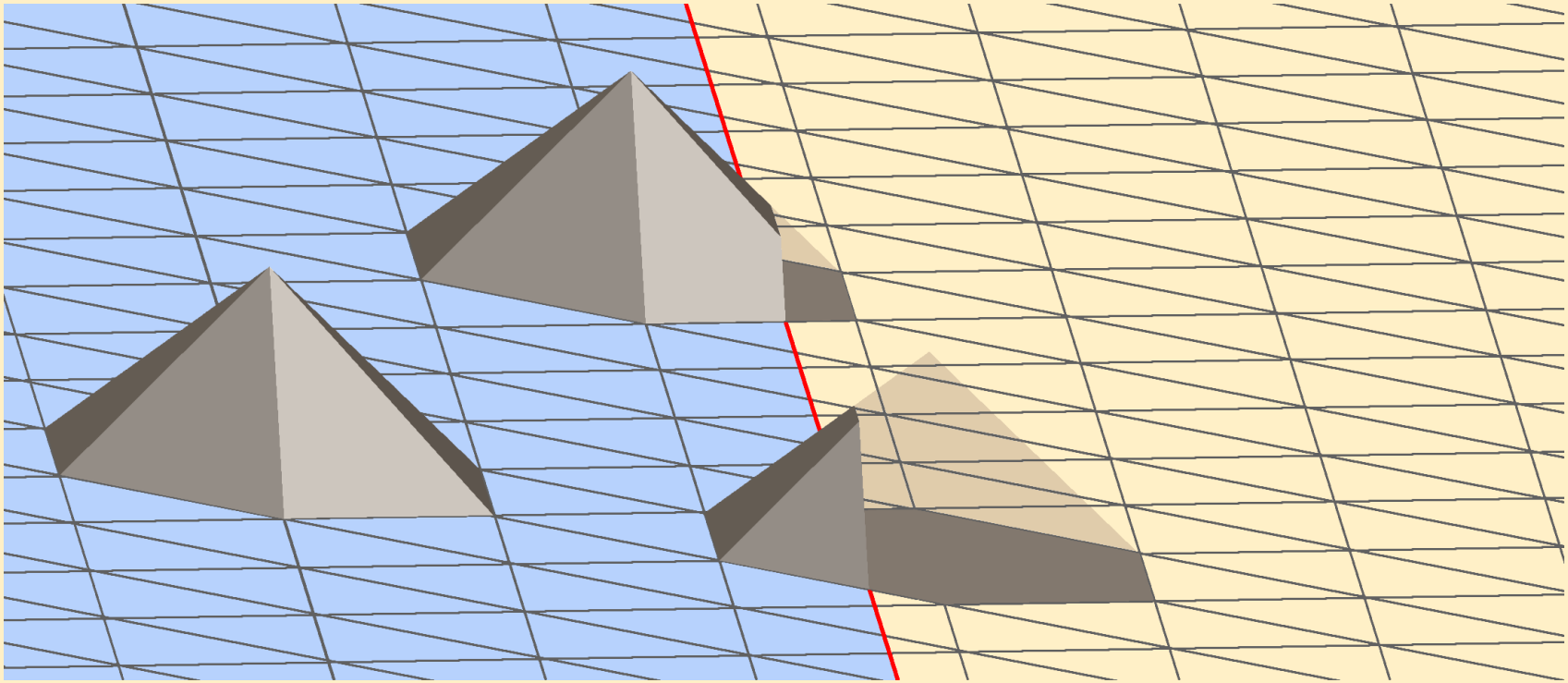


CFE-Basisfunktionen für komplizierte Gebiete in 2D



- »weit innen«: Standard-Basisfunktionen
- am Interface (innen und außen): abgeschnittene Basisfunktionen
- »weit außen«: keine Freiheitsgrade und keine Basisfunktionen

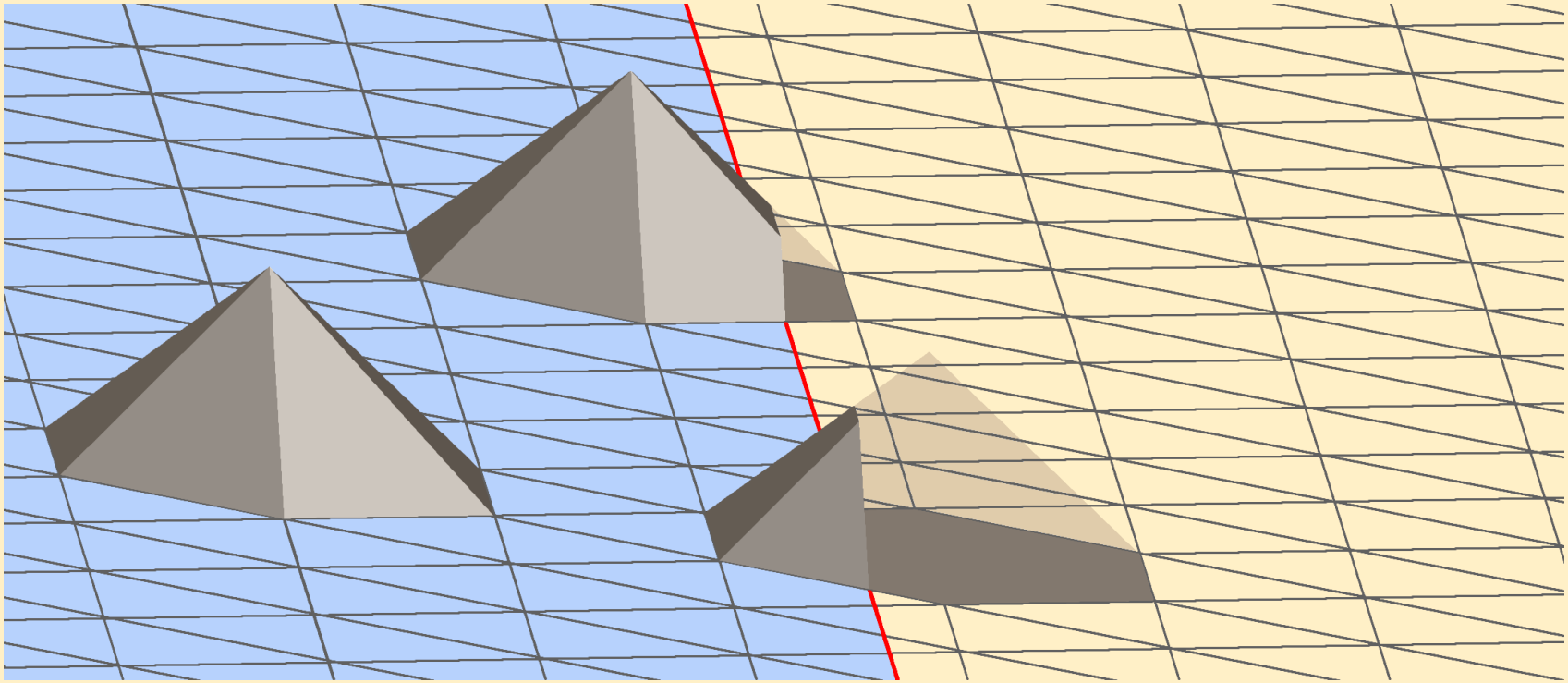
CFE-Basisfunktionen für komplizierte Gebiete in 2D



- »weit innen«: Standard-Basisfunktionen
- am Interface (innen und außen): abgeschnittene Basisfunktionen
- »weit außen«: keine Freiheitsgrade und keine Basisfunktionen

Vektorwertige Basisfunktionen haben drei separate Komponenten.

CFE-Basisfunktionen für komplizierte Gebiete in 2D



- »weit innen«: Standard-Basisfunktionen
- am Interface (innen und außen): abgeschnittene Basisfunktionen
- »weit außen«: keine Freiheitsgrade und keine Basisfunktionen

Vektorwertige Basisfunktionen haben drei separate Komponenten. Beachte nochmal das regelmäßige Gitter.

Mehrgitter-Löser

- iterative Verfahren (z. B. Gauß-Seidel) wirken glättend auf den Fehler
- »Frequenz« ist relativ zur Gitterauflösung

Mehrgitter-Löser

- iterative Verfahren (z. B. Gauß-Seidel) wirken glättend auf den Fehler
- »Frequenz« ist relativ zur Gitterauflösung

[Bakhalov; Fedorenko; Brandt 1977]

(Geometrische) Mehrgitter-Löser nutzen abwechselnd

- Glättungs-Operationen
- Grobgitter-Korrektur

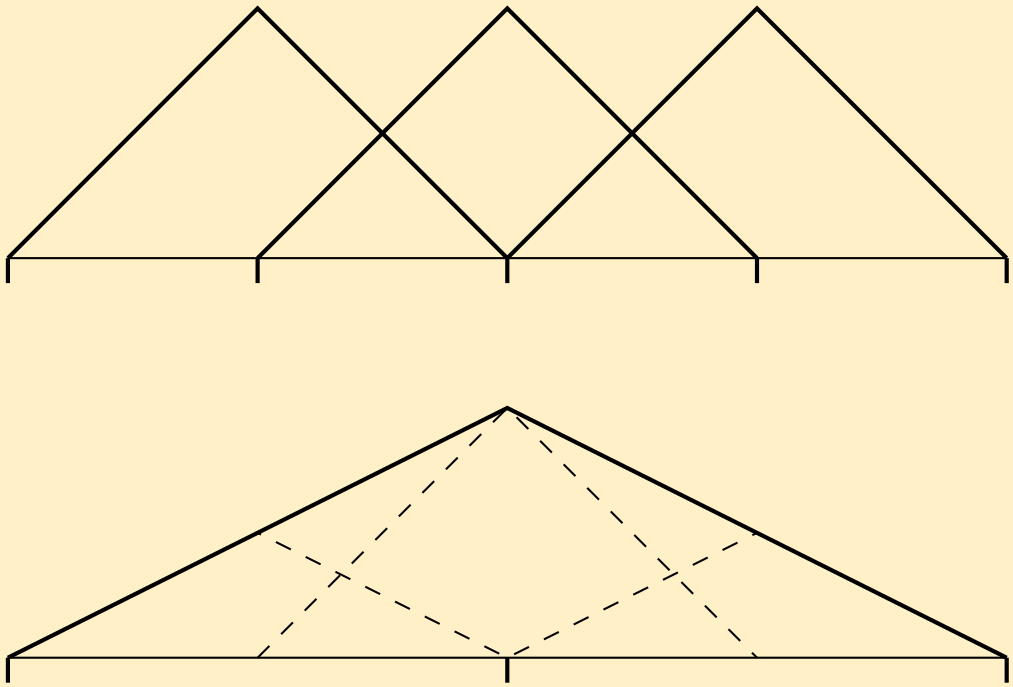
und brauchen dazu ein Vergröberungs-Schema.

CFE-Vergröberung

Allgemeines Schema

$$\psi^{\mathsf{CFE}}_{\text{vergröbert } c} = \sum_{f \in \mathbb{D}(c)} \mathfrak{w}_{f,c} \psi^{\mathsf{CFE}}_{\text{fein } f}$$

mit geeigneten Gewichten $\mathfrak{w}_{f,c}$

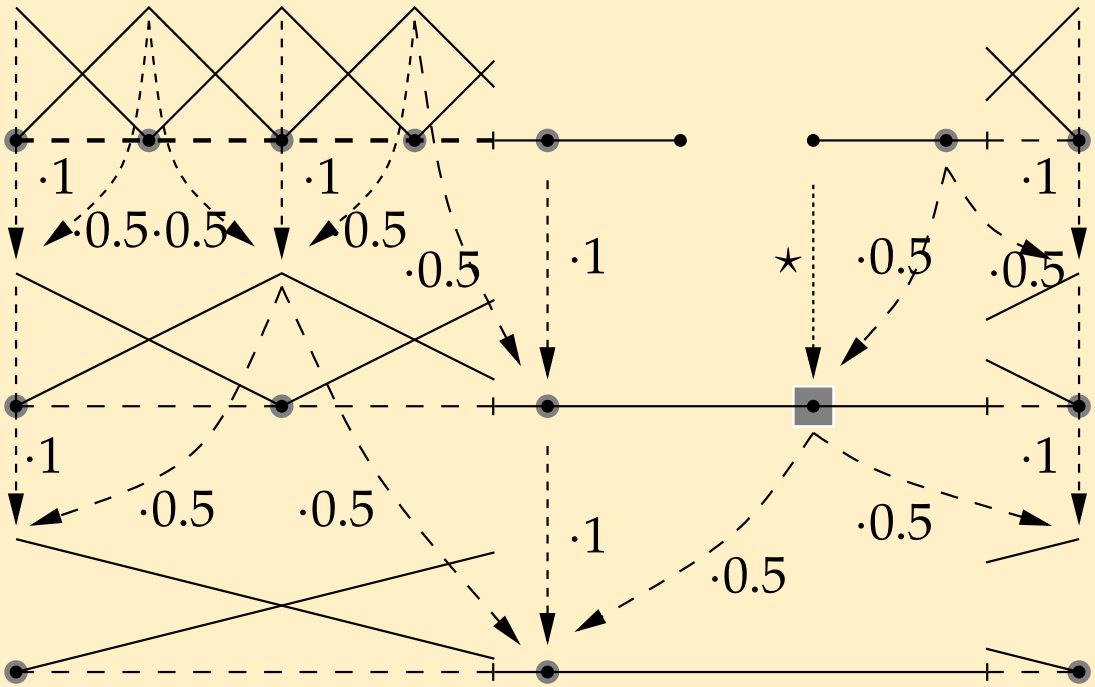


CFE-Vergröberung

Allgemeines Schema

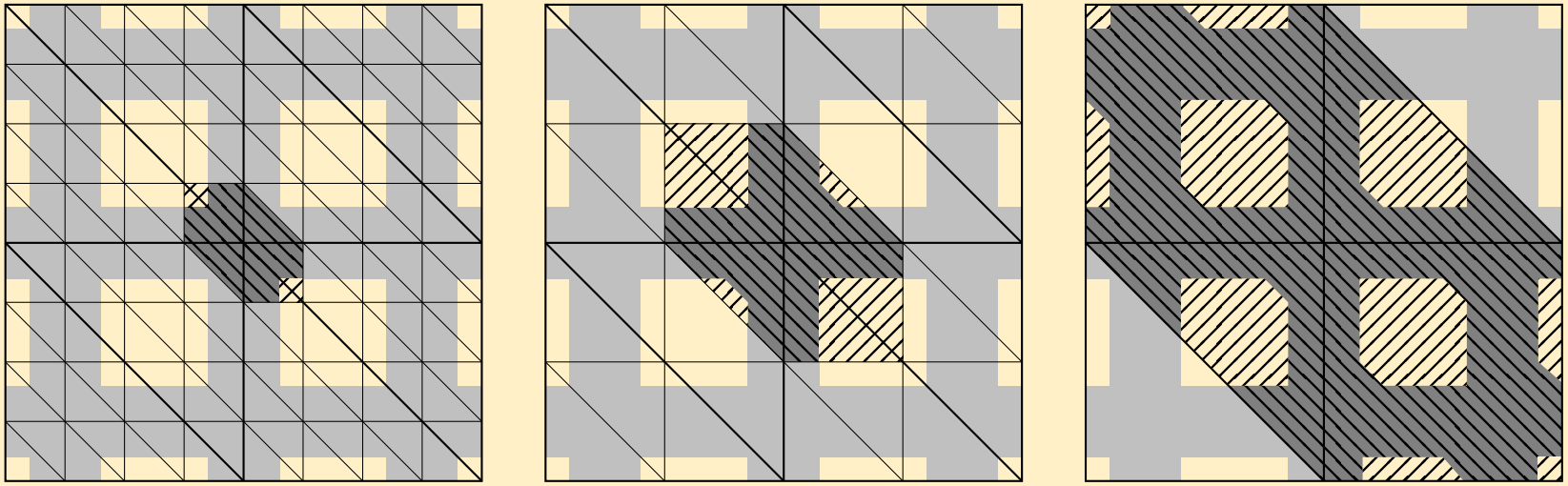
$$\psi^{\mathrm{CFE}}_{\text{vergröbert } c} = \sum_{f \in \mathbb{D}(c)} \mathfrak{w}_{f,c} \psi^{\mathrm{CFE}}_{\text{fein } f}$$

mit geeigneten Gewichten $\mathfrak{w}_{f,c}$



Vergröberte Träger

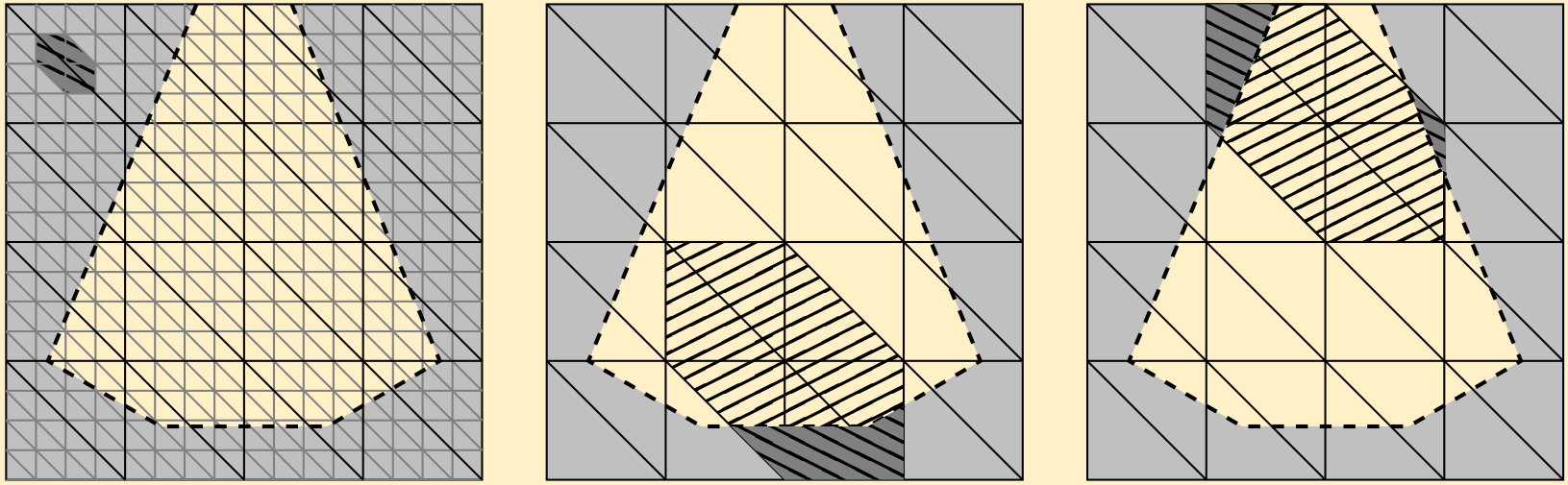
Träger feiner und vergröberter Basisfunktionen (gutartiger Fall)



✔ kann feine geometrische Details auflösen

Vergröberte Träger

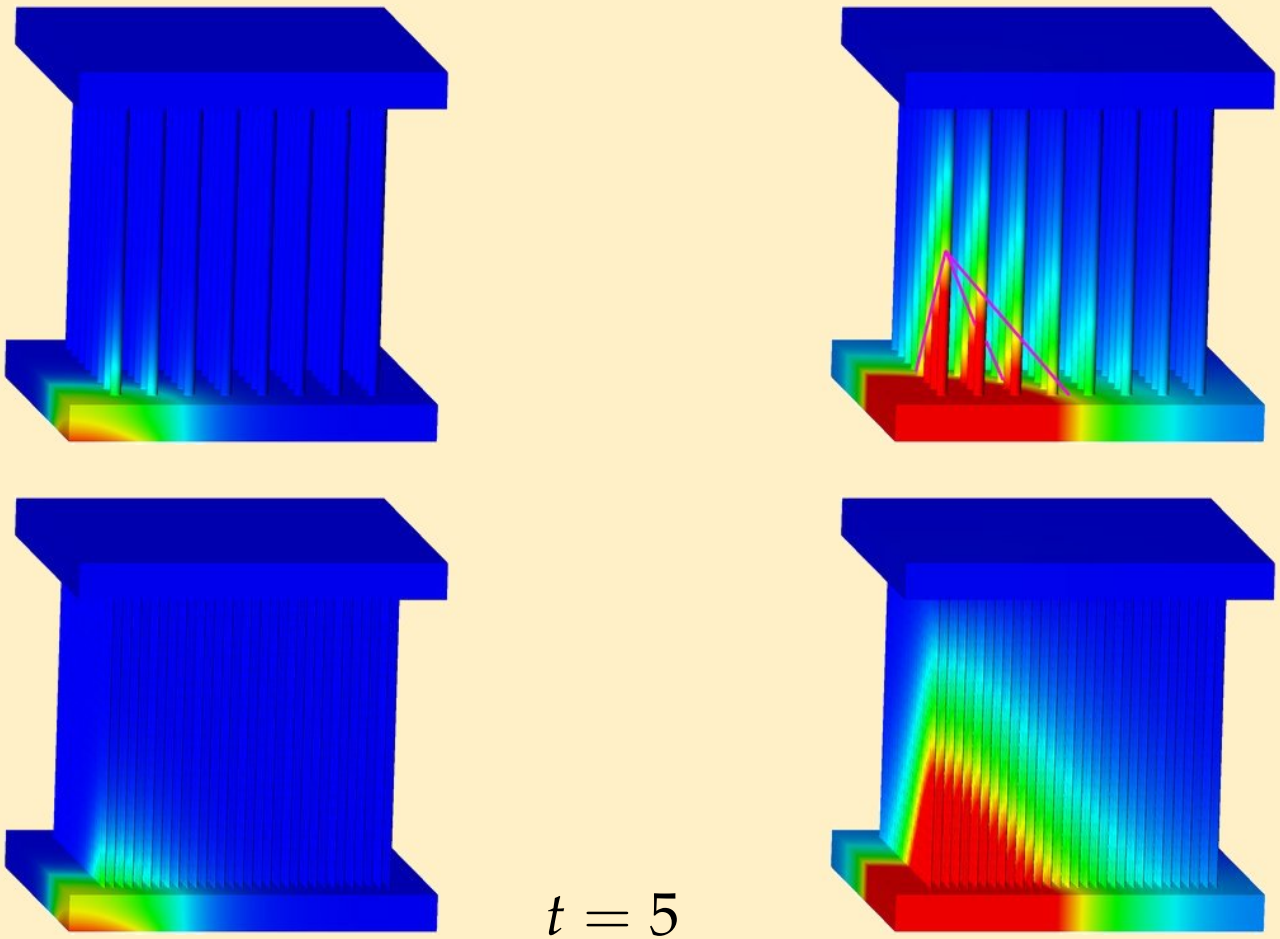
Träger feiner und vergröberter Basisfunktionen (bösartiger Fall)



✔ kann feine geometrische Details auflösen

✘ eventuell unphysikalische Kopplung

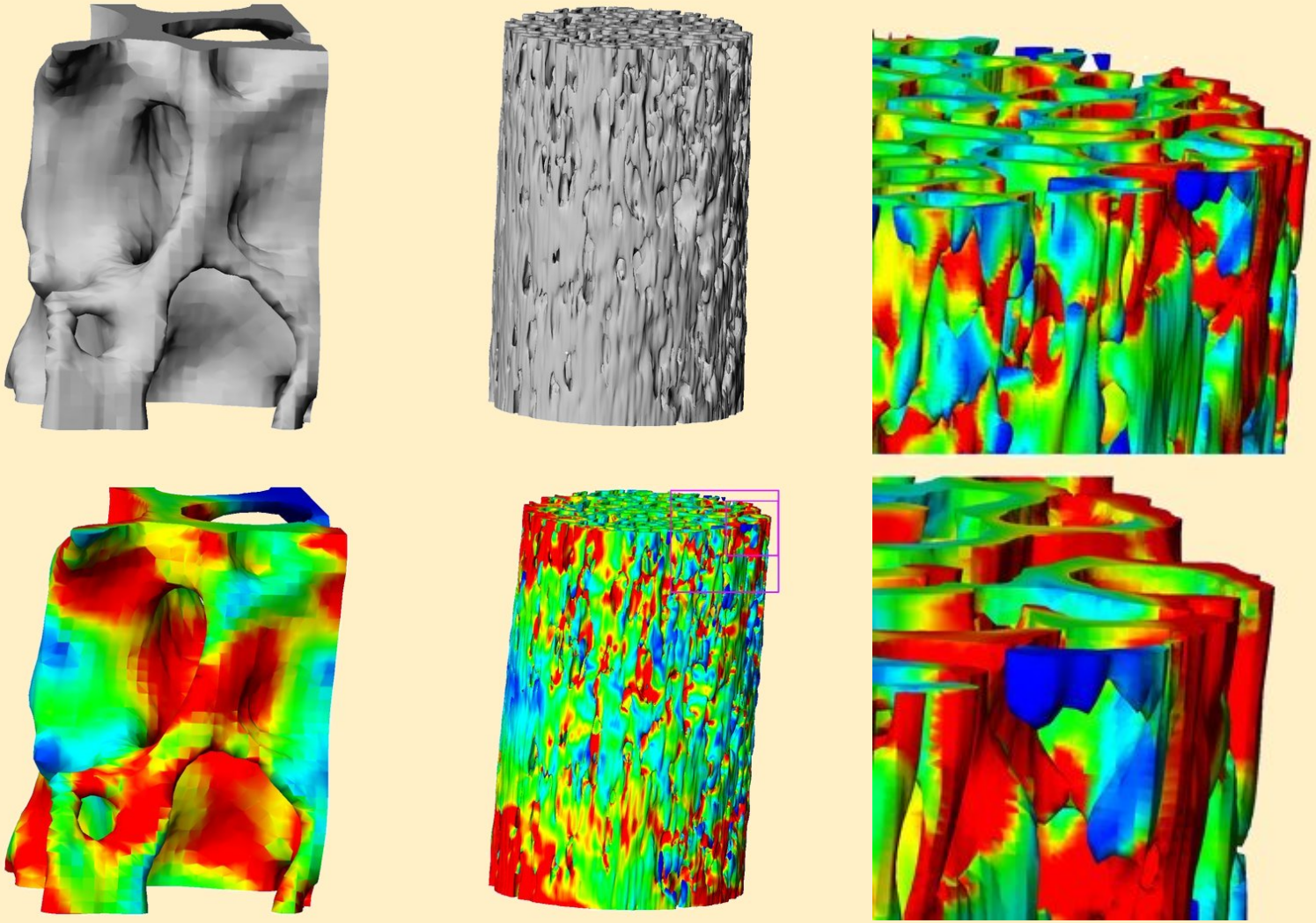
Wärmeleitung in einem künstlichen Objekt



$t = 5$ $t = 30$

- Wärmequelle in einer Ecke
- beachte die kegelförmigen Isothermen

Elastizität einer Schweinewirbel-Probe



- Scherungs-Simulation
- Farbe kodiert die von-Mises-Spannung am Interface

Übersicht

1 CFE für komplizierte Gebiete

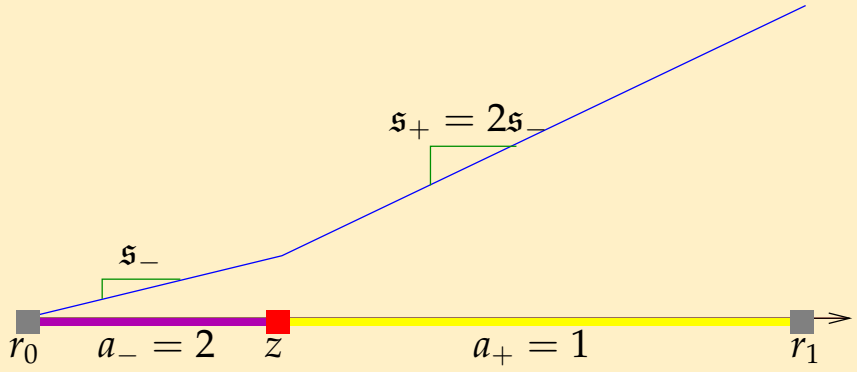
2 CFE für springende Koeffizienten

3 Homogenisierung

- S., Preusser Rumpf, Proc FEM-Workshop Ulm '09
- Preusser, Rumpf, Sauter, S., *eingereicht bei* SIAM J Sci Comput, '10

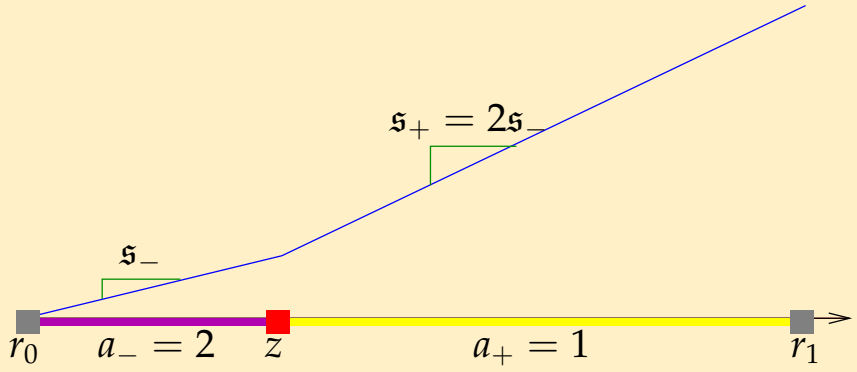
Kopplungsbedingungen

Temperaturprofil in 1D-Stab aus zwei Materialien



Kopplungsbedingungen

Temperaturprofil in 1D-Stab aus zwei Materialien

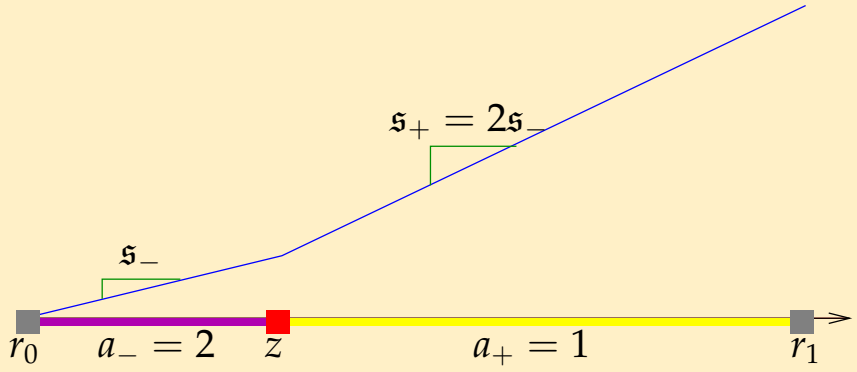


für Diffusivität a gelten Kopplungsbedingungen
($\Leftarrow$ Energieerhaltung) und stetige Temperatur

$$\langle a^+ \nabla u^+(z), n\rangle = \langle a^- \nabla u^-(z), n\rangle$$
$$\langle \nabla u^+(z), t\rangle = \langle \nabla u^-(z), t\rangle$$

Kopplungsbedingungen

Temperaturprofil in 1D-Stab aus zwei Materialien



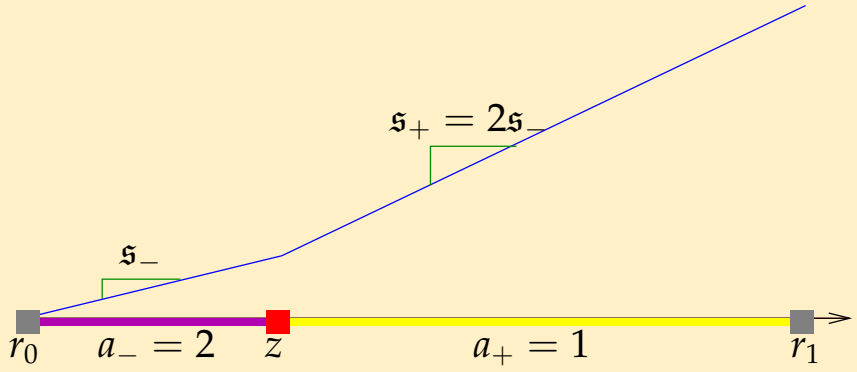
für Diffusivität a gelten Kopplungsbedingungen ($\Leftarrow$ Energieerhaltung) und stetige Temperatur

$$\langle a^+ \nabla u^+(z), n\rangle = \langle a^- \nabla u^-(z), n\rangle$$
$$\langle \nabla u^+(z), t\rangle = \langle \nabla u^-(z), t\rangle$$

Protoyp-Funktionen η^k spannen den Raum solcher stückweise affinen Funktionen auf.

Kopplungsbedingungen

Temperaturprofil in 1D-Stab aus zwei Materialien



für Diffusivität a gelten Kopplungsbedingungen
($\Leftarrow$ Energieerhaltung) und stetige Temperatur

$$\langle a^+ \nabla u^+(z), n\rangle = \langle a^- \nabla u^-(z), n\rangle$$
$$\langle \nabla u^+(z), t\rangle = \langle \nabla u^-(z), t\rangle$$

Protoyp-Funktionen η^k spannen den Raum solcher stückweise affinen Funktionen auf.

Problem: Interpolation vom regulären Gitter ■ zum Interface ■

Lokales Approximations-Problem (3D)

Für $u \in C^0$ und einen Tetraeder $T = (r_0, \ldots, r_3)$ betrachte

$$\mathcal{M}_{T,z,n}[u] = \operatorname*{argmin}_{(\tilde{\alpha}^k)} \left[\sum_{i=0,\ldots,3} \left(u(r_i) - \sum\nolimits_{k=0,\ldots,3} \tilde{\alpha}^k \eta^k(r_i) \right)^2 \right]$$

Lokales Approximations-Problem (3D)

Für $u \in C^0$ und einen Tetraeder $T = (r_0, \ldots, r_3)$ betrachte

$$\mathcal{M}_{T,z,n}[u] = \operatorname*{argmin}_{(\tilde{\alpha}^k)} \left[\sum_{i=0,\ldots,3} \left(u(r_i) - \sum\nolimits_{k=0,\ldots,3} \tilde{\alpha}^k \eta^k(r_i) \right)^2 \right]$$

$$(\alpha^0, \ldots, \alpha^3) = \operatorname*{argmin}_{(\tilde{\alpha}^k)_{k=0,\ldots,3} \in \mathcal{M}_{T,z,n}[u]} \sum\nolimits_{k=0,\ldots,3} (\tilde{\alpha}^k)^2 .$$

Lokales Approximations-Problem (3D)

Für $u \in C^0$ und einen Tetraeder $T = (r_0, \ldots, r_3)$ betrachte

$$\mathcal{M}_{T,z,n}[u] = \operatorname*{argmin}_{(\tilde{\alpha}^k)} \left[\sum_{i=0,\ldots,3} \left(u(r_i) - \sum\nolimits_{k=0,\ldots,3} \tilde{\alpha}^k \eta^k(r_i) \right)^2 \right]$$

$$(\alpha^0, \ldots, \alpha^3) = \operatorname*{argmin}_{(\tilde{\alpha}^k)_{k=0,\ldots,3} \in \mathcal{M}_{T,z,n}[u]} \sum\nolimits_{k=0,\ldots,3} (\tilde{\alpha}^k)^2 \,.$$

Definiere Interpolations-Operator (pro Simplex)

$$\mathcal{P}_{T,z,n}[u] := \sum\nolimits_{k=0,\ldots,3} \alpha^k \eta^k(z) \,.$$

Lokales Approximations-Problem (3D)

Für $u \in C^0$ und einen Tetraeder $T = (r_0, \ldots, r_3)$ betrachte

$$\mathcal{M}_{T,z,n}[u] = \operatorname*{argmin}_{(\tilde{\alpha}^k)} \left[\sum_{i=0,\ldots,3} \left(u(r_i) - \sum\nolimits_{k=0,\ldots,3} \tilde{\alpha}^k \eta^k(r_i) \right)^2 \right]$$

$$(\alpha^0, \ldots, \alpha^3) = \operatorname*{argmin}_{(\tilde{\alpha}^k)_{k=0,\ldots,3} \in \mathcal{M}_{T,z,n}[u]} \sum\nolimits_{k=0,\ldots,3} (\tilde{\alpha}^k)^2 \,.$$

Definiere Interpolations-Operator (pro Simplex)

$$\mathcal{P}_{T,z,n}[u] := \sum\nolimits_{k=0,\ldots,3} \alpha^k \eta^k(z) \,.$$

und gemittelt über an p angrenzende Simplizes

$$\mathcal{I}[u](p) := \begin{cases} \frac{1}{\#\{T \ni p\}} \sum\limits_{T \ni p} \mathcal{P}_{T,p,n(p)}[u] & \text{für } p \in \mathcal{N}^{\text{virt}} \,, \\ u(p) & \text{für } p \in \mathcal{N}^{\square} \end{cases}$$

mit stückweise affiner Interpolation auf $\mathcal{G}^{\triangle}$.

Lokales Interpolations-Problem

Im skalar isotropen Fall und bei Elastizität ohne Querkontraktion ist $\mathcal{M}_{T,z,n}[u] = \{(\alpha^0, \ldots, \alpha^3)\}$.

Lokales Interpolations-Problem

Im skalar isotropen Fall und bei Elastizität ohne Querkontraktion ist $\mathcal{M}_{T,z,n}[u] = \{(\alpha^0, \ldots, \alpha^3)\}$.
Dann betrachte das lokale Interpolations-Problem für $u \in C^0$

$$\mathcal{P}_{T,z,n}[u] = u(z) = \sum_{i=0,\ldots,3} \mathfrak{w}_{z,r_i;T} u(r_i) \,.$$

Lokales Interpolations-Problem

Im skalar isotropen Fall und bei Elastizität ohne Querkontraktion ist $\mathcal{M}_{T,z,n}[u] = \{(\alpha^0, \ldots, \alpha^3)\}$.
Dann betrachte das lokale Interpolations-Problem für $u \in C^0$

$$\mathcal{P}_{T,z,n}[u] = u(z) = \sum_{i=0,\ldots,3} \mathfrak{w}_{z,r_i;T} u(r_i)\,.$$

Für $u \in \operatorname{span}(\eta^k)$ führt das auf ein Gleichungssystem

$$\left[\eta^i(r_j)\right]_{i,j} \left[\mathfrak{w}_{z,r_j;T}\right]_j = \left[\eta^i(z)\right]_i$$

Lokales Interpolations-Problem

Im skalar isotropen Fall und bei Elastizität ohne Querkontraktion ist $\mathcal{M}_{T,z,n}[u] = \{(\alpha^0, \dots, \alpha^3)\}$.
Dann betrachte das lokale Interpolations-Problem für $u \in C^0$

$$\mathcal{P}_{T,z,n}[u] = u(z) = \sum_{i=0,\dots,3} \mathfrak{w}_{z,r_i;T} u(r_i)\,.$$

Für $u \in \operatorname{span}(\eta^k)$ führt das auf ein Gleichungssystem

$$\left[\eta^i(r_j)\right]_{i,j} \left[\mathfrak{w}_{z,r_j;T}\right]_j = \left[\eta^i(z)\right]_i$$

Mittele die Simplex-weisen Gewichte

$$\mathfrak{w}_{z,r} = \frac{1}{\#\{T \ni z\}} \sum_{T \ni z} \mathfrak{w}_{z,r;T}$$

Lokales Interpolations-Problem

Im skalar isotropen Fall und bei Elastizität ohne Querkontraktion ist $\mathcal{M}_{T,z,n}[u] = \{(\alpha^0, \dots, \alpha^3)\}$.
Dann betrachte das lokale Interpolations-Problem für $u \in C^0$

$$\mathcal{P}_{T,z,n}[u] = u(z) = \sum_{i=0,\dots,3} \mathfrak{w}_{z,r_i;T} u(r_i)\,.$$

Für $u \in \operatorname{span}(\eta^k)$ führt das auf ein Gleichungssystem

$$\left[\eta^i(r_j)\right]_{i,j} \left[\mathfrak{w}_{z,r_j;T}\right]_j = \left[\eta^i(z)\right]_i$$

Mittele die Simplex-weisen Gewichte

$$\mathfrak{w}_{z,r} = \frac{1}{\#\{T \ni z\}} \sum_{T \ni z} \mathfrak{w}_{z,r;T}$$

und definiere den Interpolations-Operator

$$\mathcal{J}[u](z) := \sum_{r \in \mathbb{P}(z)} \mathfrak{w}_{z,r} u(r)$$

mit stückweise affiner Interpolation auf $\mathcal{G}^{\triangle}$.

CFE-Basisfunktionen für springende Koeffizienten

Definiere die CFE-Basisfunktionen basierend auf der Interpolation als

$$\psi_r^{\mathsf{CFE}} := \mathcal{I}[\psi_r^{\boxtimes}] \quad \forall r \in \mathcal{N}^{\square}.$$

CFE-Basisfunktionen für springende Koeffizienten

Definiere die CFE-Basisfunktionen basierend auf der Interpolation als

$$\psi_r^{\mathsf{CFE}} := \mathcal{I}[\psi_r^{\boxtimes}] \quad \forall r \in \mathcal{N}^{\square}\,.$$

Über das lokale Interpolations-Problem erhält man sie auch als

$$\psi_r^{\mathsf{CFE}}(x) = \sum_{z \in \mathbb{D}(r)} \mathfrak{w}_{z,r} \psi_z^{\triangle}(x)\,.$$

CFE-Basisfunktionen für springende Koeffizienten

Definiere die CFE-Basisfunktionen basierend auf der Interpolation als

$$\psi_r^{\mathsf{CFE}} := \mathcal{I}[\psi_r^{\boxtimes}] \quad \forall r \in \mathcal{N}^{\square}\,.$$

Über das lokale Interpolations-Problem erhält man sie auch als

$$\psi_r^{\mathsf{CFE}}(x) = \sum_{z \in \mathbb{D}(r)} \mathfrak{w}_{z,r} \psi_z^{\triangle}(x)\,.$$

(deswegen auch *zusammengesetzte* Finite Elemente)

CFE-Basisfunktionen für springende Koeffizienten

Definiere die CFE-Basisfunktionen basierend auf der Interpolation als

$$\psi_r^{\mathsf{CFE}} := \mathcal{I}[\psi_r^{\boxtimes}] \quad \forall r \in \mathcal{N}^{\square}\,.$$

Über das lokale Interpolations-Problem erhält man sie auch als

$$\psi_r^{\mathsf{CFE}}(x) = \sum_{z \in \mathbb{D}(r)} \mathfrak{w}_{z,r} \psi_z^{\triangle}(x)\,.$$

(deswegen auch *zusammengesetzte* Finite Elemente)

Vektorwertiger Fall

- Kopplungsbedingung beinhaltet Kräftegleichgewicht

CFE-Basisfunktionen für springende Koeffizienten

Definiere die CFE-Basisfunktionen basierend auf der Interpolation als

$$\psi_r^{\mathsf{CFE}} := \mathcal{I}[\psi_r^{\boxtimes}] \quad \forall r \in \mathcal{N}^{\square}\,.$$

Über das lokale Interpolations-Problem erhält man sie auch als

$$\psi_r^{\mathsf{CFE}}(x) = \sum_{z \in \mathbb{D}(r)} \mathfrak{w}_{z,r} \psi_z^{\triangle}(x)\,.$$

(deswegen auch *zusammengesetzte* Finite Elemente)

Vektorwertiger Fall

- Kopplungsbedingung beinhaltet Kräftegleichgewicht
- Gewichte $\alpha, \mathfrak{W}_{z,r} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

CFE-Basisfunktionen für springende Koeffizienten

Definiere die CFE-Basisfunktionen basierend auf der Interpolation als

$$\psi_r^{\mathsf{CFE}} := \mathcal{I}[\psi_r^{\boxtimes}] \quad \forall r \in \mathcal{N}^{\square}\,.$$

Über das lokale Interpolations-Problem erhält man sie auch als

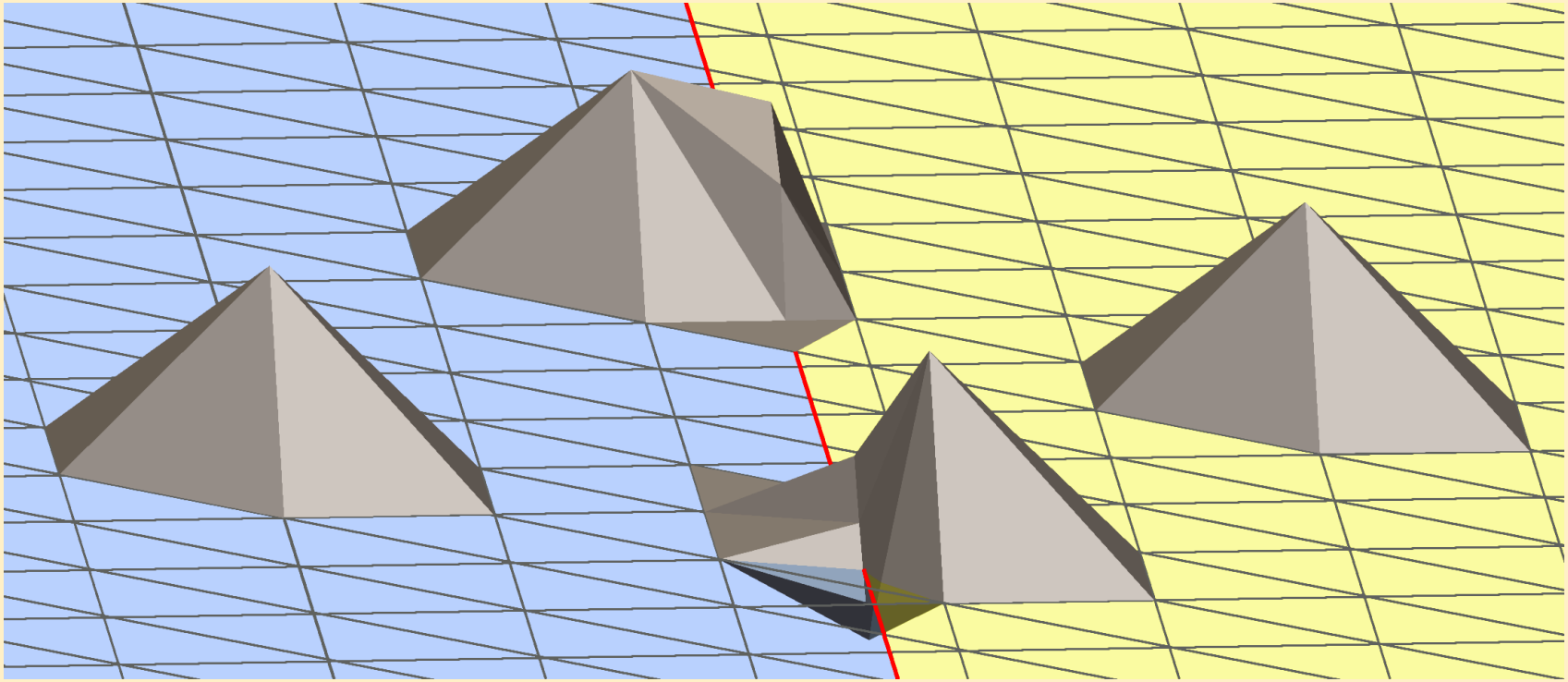
$$\psi_r^{\mathsf{CFE}}(x) = \sum_{z \in \mathbb{D}(r)} \mathfrak{w}_{z,r} \psi_z^{\triangle}(x)\,.$$

(deswegen auch *zusammengesetzte* Finite Elemente)

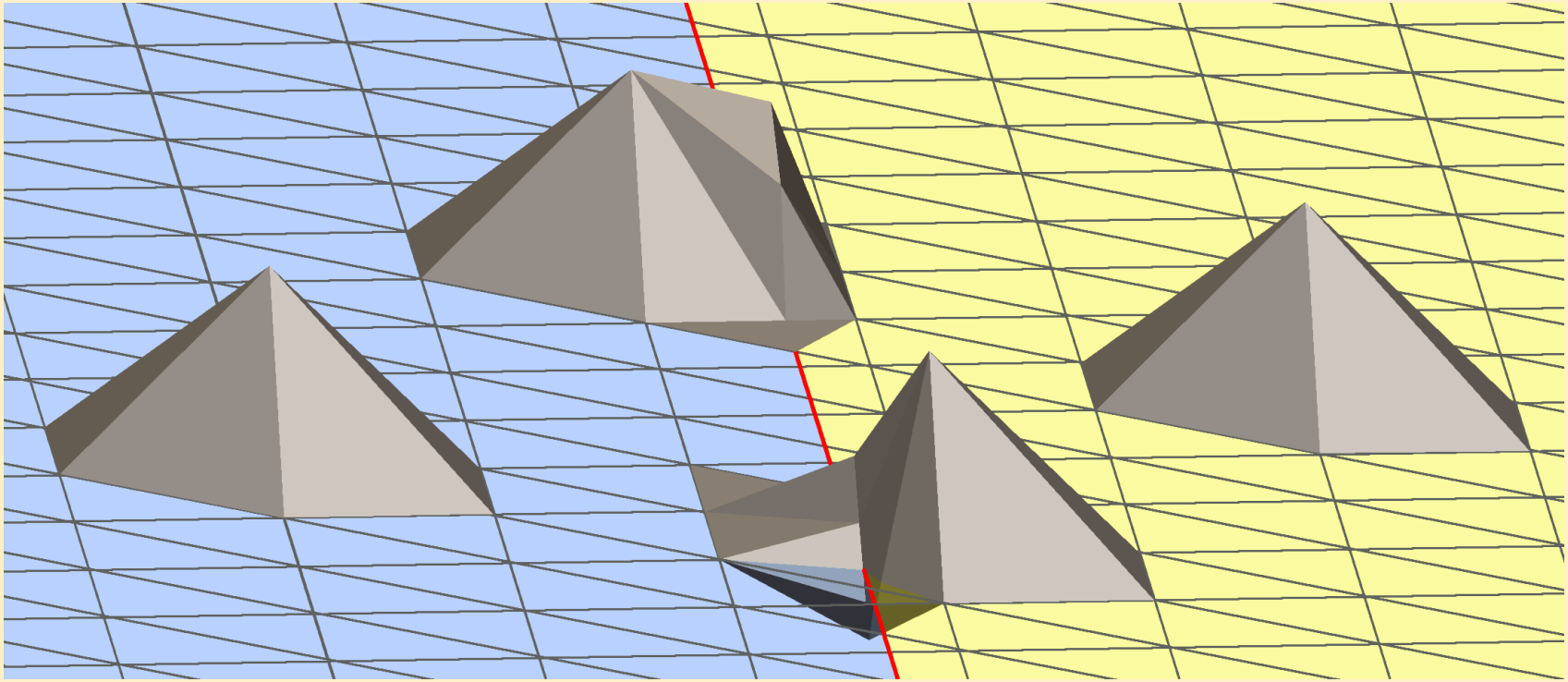
Vektorwertiger Fall

- Kopplungsbedingung beinhaltet Kräftegleichgewicht
- Gewichte $\alpha, \mathfrak{W}_{z,r} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$
- Ψ^{CFE} am Interface koppeln Verschiebung in allen Raumrichtungen

CFE-Basisfunktionen für springende Koeffizienten in 2D



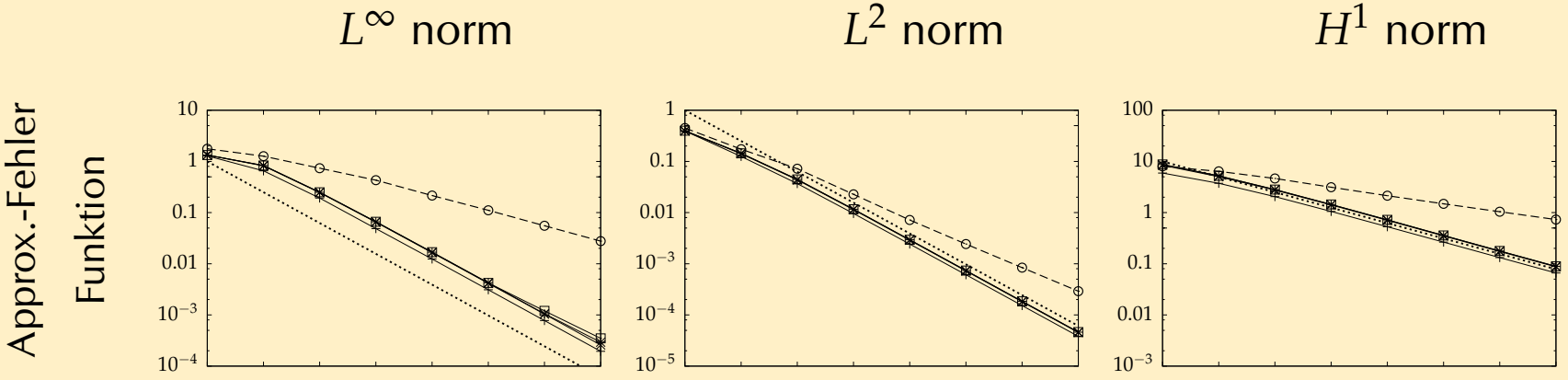
CFE-Basisfunktionen für springende Koeffizienten in 2D



- Interpolationsschema ist nicht notwendig eine Konvex-Kombination
- Basisfunktionen bilden Teilung der 1 (nicht notwendig positiv)
- Basisfunktionen selber erfüllen nicht die Kopplungsbedingung
- größere, aber immer noch lokale, Träger am Interface

Konvergenz der Approximation

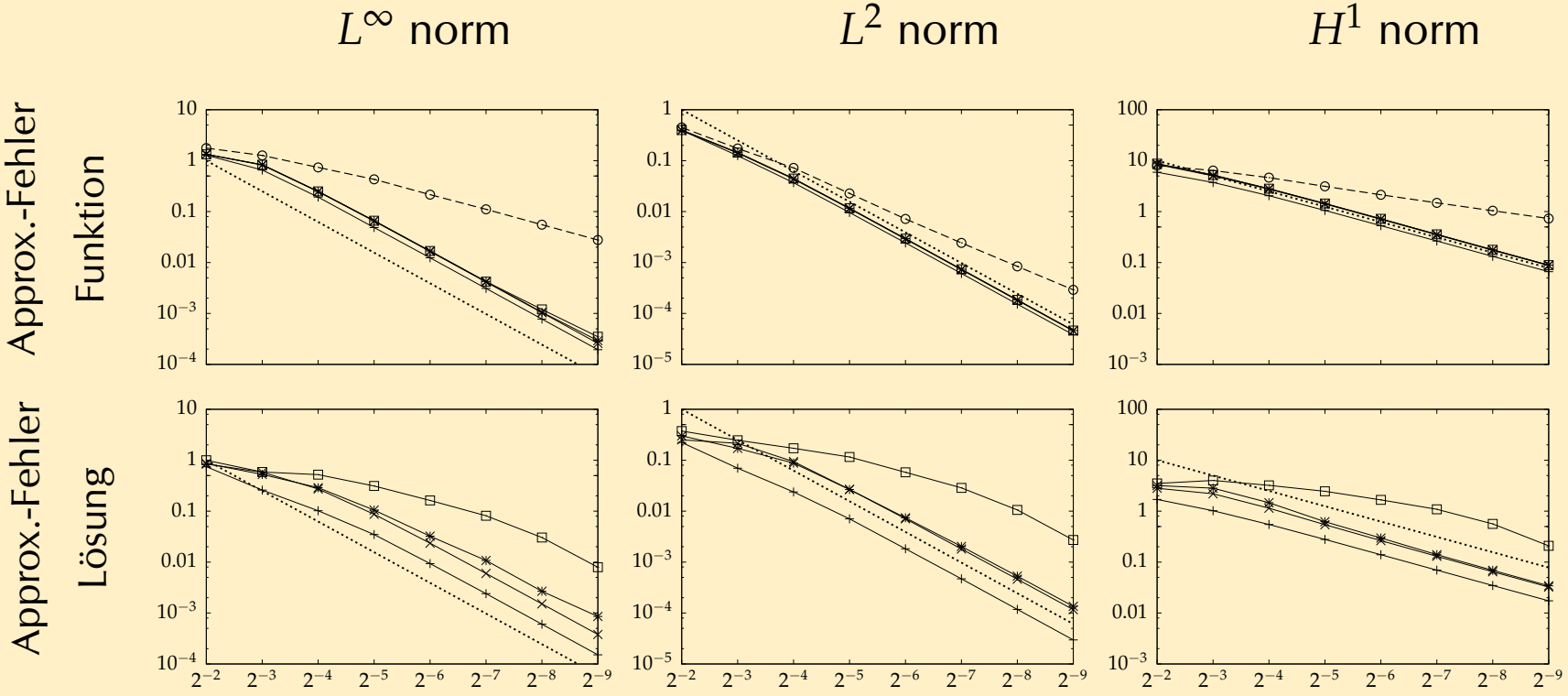
- sphärisch-symmetrische Funktion mit Knick und Nullrandwerten



CFE: $\kappa = 2$ —+—, $\kappa = 32$ —×—, $\kappa = 1000$ —✳—, $\kappa = 10^6$ —□—
stdFE, $\kappa = 32$ –⊙–, { 2., 2., 1.} Ordnung ·····

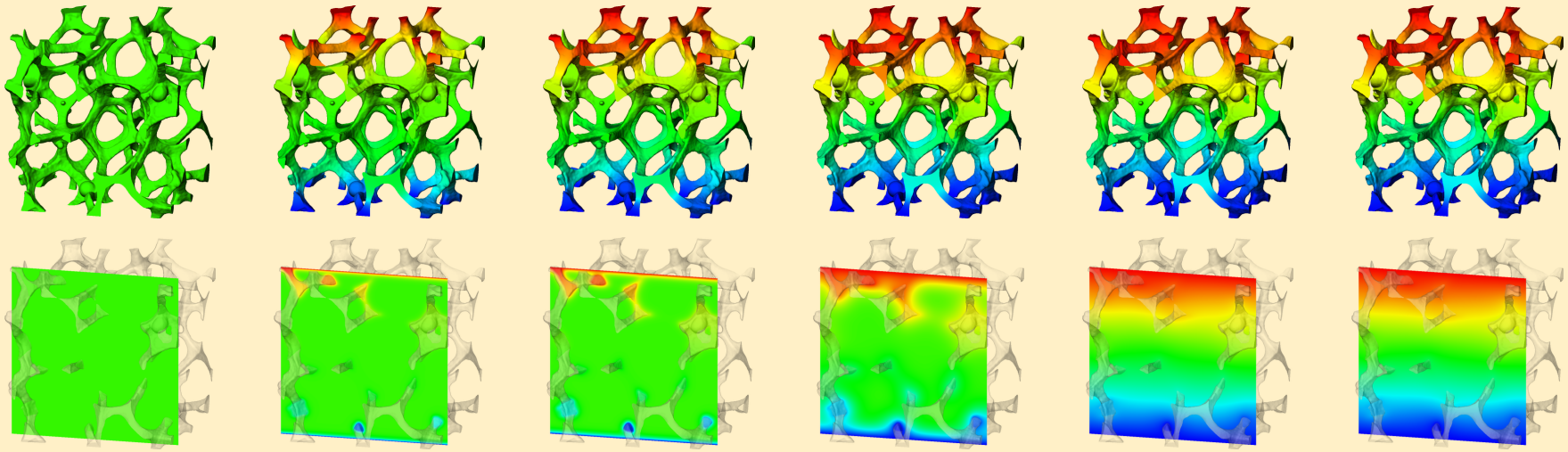
Konvergenz der Approximation

- sphärisch-symmetrische Funktion mit Knick und Nullrandwerten
- zugehöriges elliptisches Problem mit bekannter Lösung



CFE: $\kappa = 2$ —+—, $\kappa = 32$ —×—, $\kappa = 1000$ —✳—, $\kappa = 10^6$ —□—
stdFE, $\kappa = 32$ –⊙–, { 2., 2., 1.} Ordnung ·····

Wärmeleitung in Al-Schaum/PMMA

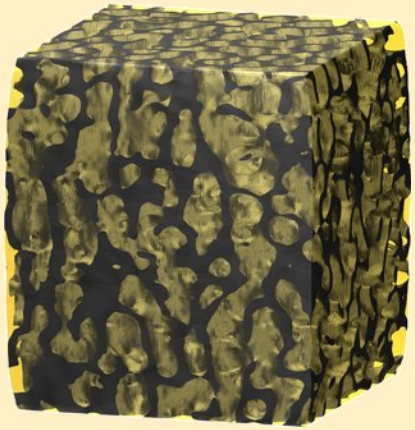


$t = 0.0$ $t = 0.05$ $t = 0.10$ $t = 1.0$ $t = 10.0$ $t = 20.0$

Verhältnis der Diffusivitäten 1 : 1247

Elastizität in und Knochen/PMMA

undef.

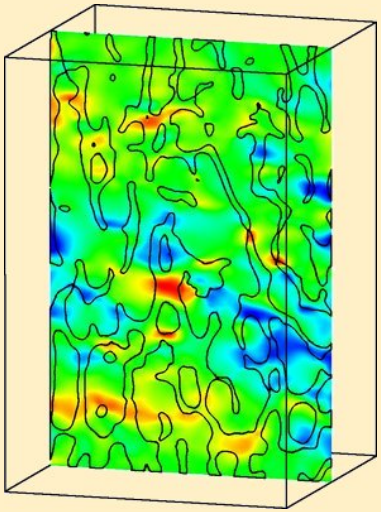


deformiert
($\times$ 20)

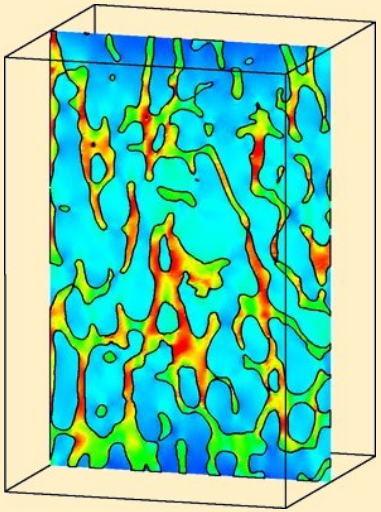
Verhältnis der E-Moduln 13 : 3 MPa

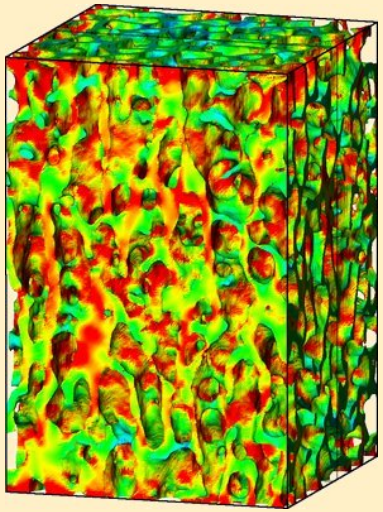
Elastizität in und Knochen/PMMA

undef.



y-Versch.





von-Mises-Spannung

Verhältnis der E-Moduln 13 : 3 MPa

Übersicht

1 CFE für komplizierte Gebiete

2 CFE für springende Koeffizienten

3 Homogenisierung

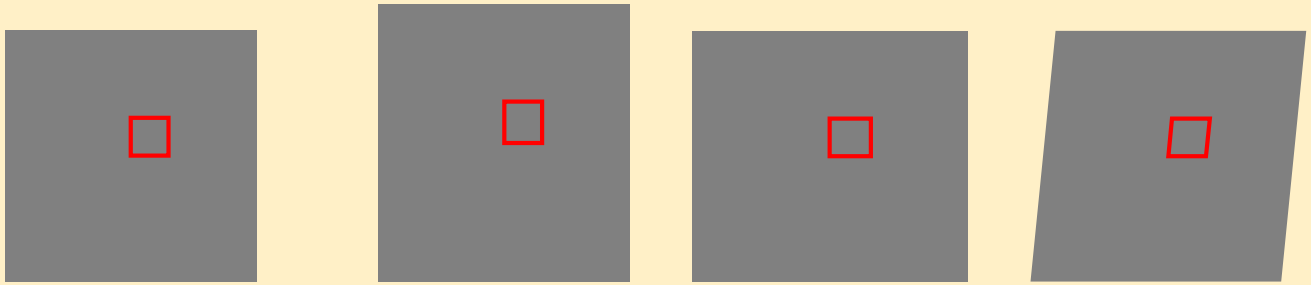
- S., Wolfram, Wilke, Rumpf, Proc FEM-Workshop Ulm ’08
- Rumpf, S., Wilke, Wolfram, Proc Multiphys. Simul. Conf., ’10
- Preusser, Rumpf, Sauter, S., *eingereicht bei* SIAM J Sci Comput, ’10

Numerische Homogenisierung

Bestimme den effektiven Elastizitätstensor, indem für Einheitsdehnungen die Spannungsantwort bestimmt wird.

Numerische Homogenisierung

Bestimme den effektiven Elastizitätstensor, indem für Einheitsdehnungen die Spannungsantwort bestimmt wird.



Numerische Homogenisierung für periodische Zellen

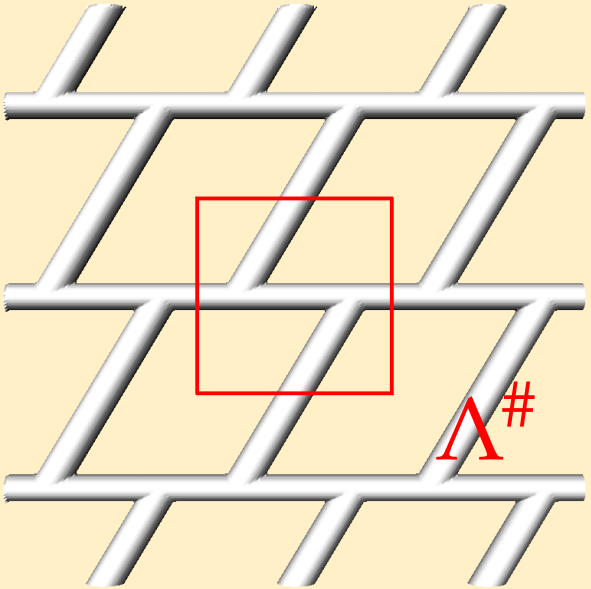
Zerlege die tatsächliche Verschiebung $u = \bar{u} + \tilde{u}$ in

- makroskopischen Anteil (Einheitsdehnung $\bar{u}$)
- oszillierenden periodischen Anteil $\tilde{u}$

Numerische Homogenisierung für periodische Zellen

Zerlege die tatsächliche Verschiebung $u = \bar{u} + \tilde{u}$ in

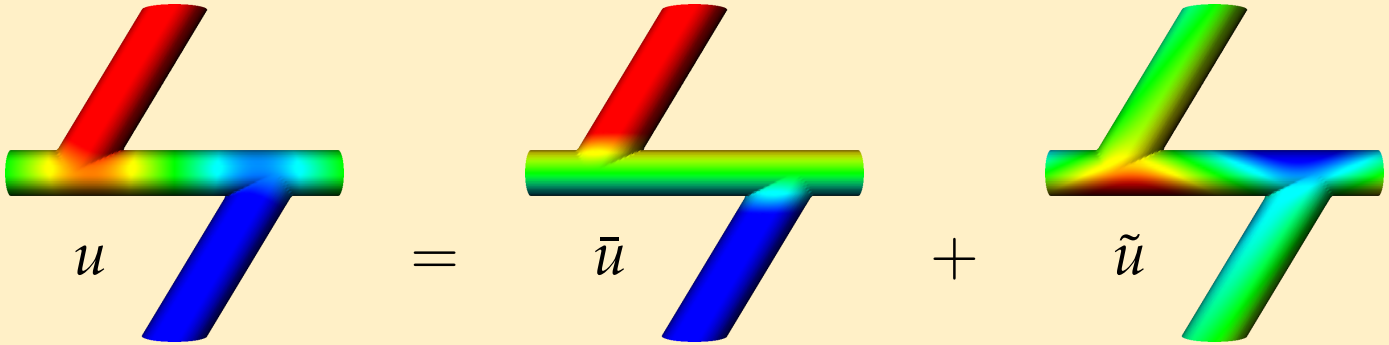
- makroskopischen Anteil (Einheitsdehnung $\bar{u}$)
- oszillierenden periodischen Anteil $\tilde{u}$



Numerische Homogenisierung für periodische Zellen

Zerlege die tatsächliche Verschiebung $u = \bar{u} + \tilde{u}$ in

- makroskopischen Anteil (Einheitsdehnung $\bar{u}$)
- oszillierenden periodischen Anteil $\tilde{u}$



z-Verschiebungen (verschiedene Farbskalen)

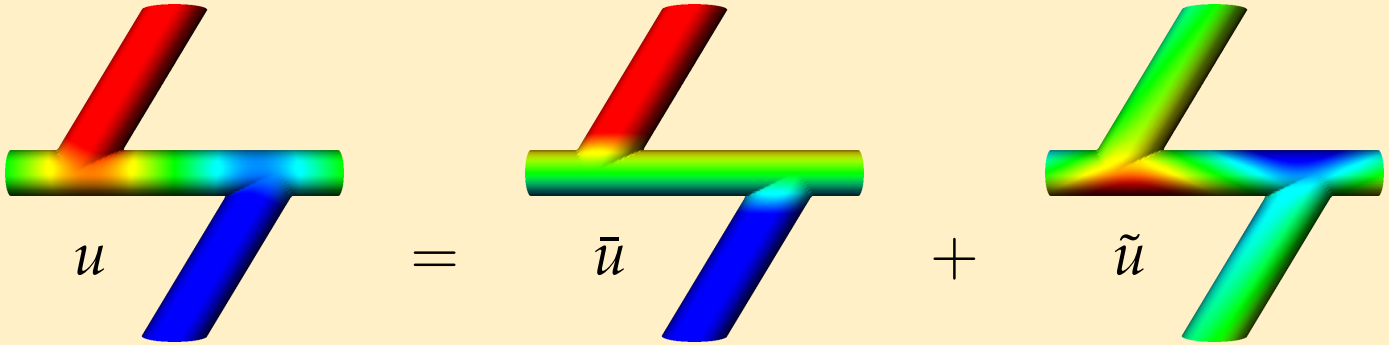
Numerische Homogenisierung für periodische Zellen

Zerlege die tatsächliche Verschiebung $u = \bar{u} + \tilde{u}$ in

- makroskopischen Anteil (Einheitsdehnung $\bar{u}$)
- oszillierenden periodischen Anteil $\tilde{u}$

$$-\operatorname{div} C\epsilon(u) = 0 \quad \Rightarrow -\operatorname{div} C\epsilon(\tilde{u}) = \operatorname{div} C\epsilon(\bar{u})$$

Für eine eindeutige Zerlegung brauchen wir $\fint_{\Lambda^\#} \tilde{u} = 0$.



z-Verschiebungen (verschiedene Farbskalen)

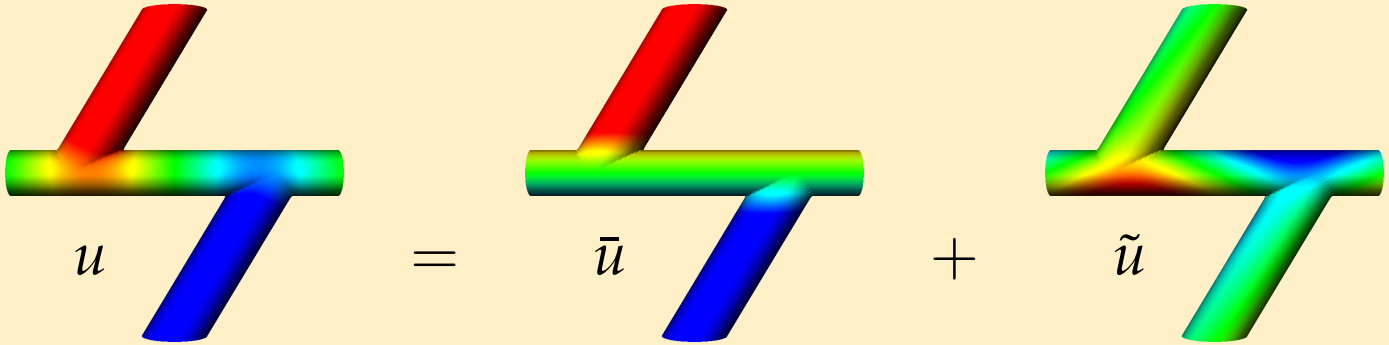
Numerische Homogenisierung für periodische Zellen

Zerlege die tatsächliche Verschiebung $u = \bar{u} + \tilde{u}$ in

- makroskopischen Anteil (Einheitsdehnung $\bar{u}$)
- oszillierenden periodischen Anteil $\tilde{u}$

$$-\operatorname{div} C\epsilon(u) = 0 \quad \Rightarrow -\operatorname{div} C\epsilon(\tilde{u}) = \operatorname{div} C\epsilon(\bar{u})$$

Für eine eindeutige Zerlegung brauchen wir $\fint_{\Lambda^\#} \tilde{u} = 0$.



z-Verschiebungen (verschiedene Farbskalen)

Wegen $\sigma = C\epsilon$ erhalten wir

$$\bar{C}_{\cdot\cdot ij} = \bar{\sigma}^{ij} = \fint_{\Lambda^\#} C\left[\epsilon(\bar{u}^{ij}) + \epsilon(\tilde{u}^{ij})\right],$$

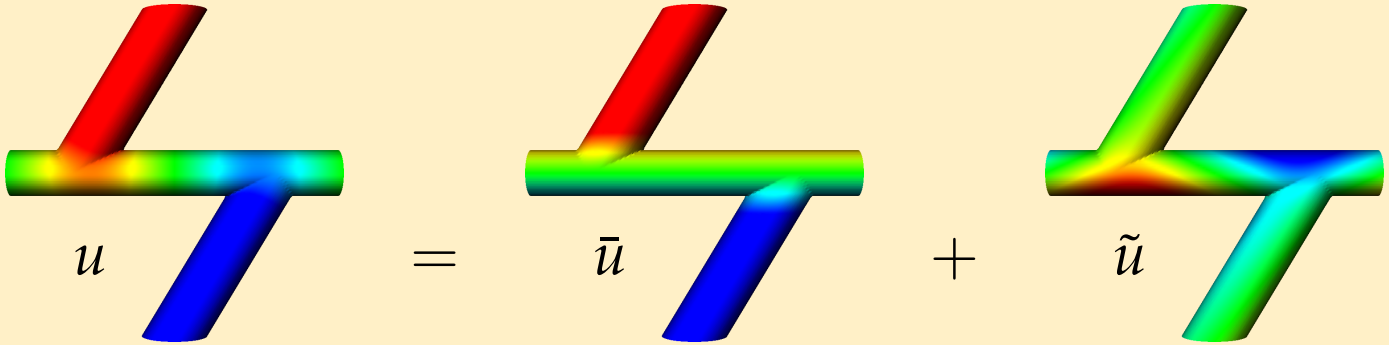
Numerische Homogenisierung für periodische Zellen

Zerlege die tatsächliche Verschiebung $u = \bar{u} + \tilde{u}$ in

- makroskopischen Anteil (Einheitsdehnung $\bar{u}$)
- oszillierenden periodischen Anteil $\tilde{u}$

$$-\operatorname{div} C\epsilon(u) = 0 \quad \Rightarrow -\operatorname{div} C\epsilon(\tilde{u}) = \operatorname{div} C\epsilon(\bar{u})$$

Für eine eindeutige Zerlegung brauchen wir $\fint_{\Lambda^\#} \tilde{u} = 0$.



z-Verschiebungen (verschiedene Farbskalen)

Wegen $\sigma = C\epsilon$ erhalten wir

$$\bar{C}_{\cdot\cdot ij} = \bar{\sigma}^{ij} = \fint_{\Lambda^\#} C\Big[\epsilon(\bar{u}^{ij}) + \epsilon(\tilde{u}^{ij})\Big],$$

wähle $\bar{u}^{ij}$ mit $\epsilon(\bar{u}^{ij}) = e_{ij} := \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$, bestimme dafür $\tilde{u}^{ij}$

Numerische Homogenisierung für repräsentative Volumen

- $\Lambda_\beta^\#$ mindestens 5^3 Trabekelabstände groß

  vgl. [Harrigan et al, J Biomech 21:269]

- schreibe Einheitsdehnungen durch Dirichlet-Randwerte vor

Numerische Homogenisierung für repräsentative Volumen

- $\Lambda^{\#}_{\beta}$ mindestens 5^3 Trabekelabstände groß

  vgl. [Harrigan et al, J Biomech 21:269]

- schreibe Einheitsdehnungen durch Dirichlet-Randwerte vor

Für $\bar{u}^{ij} = e_{ij} := \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$ (wie vorher) betrachte

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}\left(C\epsilon(u^{ij})\right) &= 0 \quad && \text{in } \Lambda^{\#} \\
u^{ij} &= \bar{u}^{ij} && \text{auf } \partial^{\square}\Lambda^{\#}
\end{aligned}
$$

Numerische Homogenisierung für repräsentative Volumen

- $\Lambda^{\#}_{\beta}$ mindestens 5^3 Trabekelabstände groß

  vgl. [Harrigan et al, J Biomech 21:269]

- schreibe Einheitsdehnungen durch Dirichlet-Randwerte vor

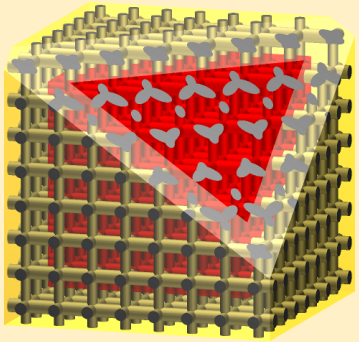
Für $\bar{u}^{ij} = e_{ij} := \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$ (wie vorher) betrachte

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(C\epsilon(u^{ij})\right) &= 0 \quad \text{in } \Lambda^{\#} \\ u^{ij} &= \bar{u}^{ij} \quad \text{auf } \partial^{\square}\Lambda^{\#} \end{aligned}$$

Die durschschnittliche Spannung wird berechnet als

$$\left[\bar{C}_{\cdot\cdot ij} = \right]\bar{\sigma}^{ij} = \fint_{\Lambda^{\#}_{\beta}} C\epsilon[u^{ij}]\,.$$

Numerische Homogenisierung für repräsentative Volumen

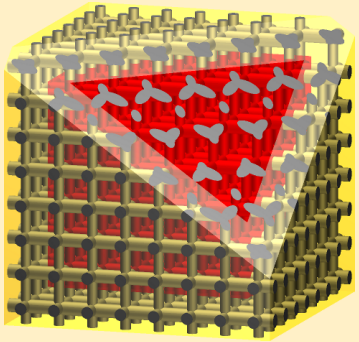


$$[\bar{C}_{ij\cdot\cdot} =]\bar{\sigma}^{ij} = \fint_{\Lambda^{\#}_{\beta}} C\epsilon[u^{ij}]$$

$\Lambda^{\#}_{\beta} = \{x \in \Lambda^{\#} \mid \mathrm{dist}(x, \partial^{\square}\Lambda^{\#} > \beta\}$,

da Dirichlet-Randwerte zu künstlicher Versteifung am Rand führen.

Numerische Homogenisierung für repräsentative Volumen



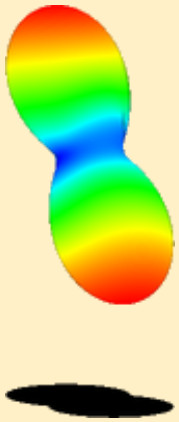
$$[\bar{C}_{ij\cdot\cdot} =]\bar{\sigma}^{ij} = \fint_{\Lambda^{\#}_{\beta}} C\epsilon[u^{ij}]$$

$\Lambda^{\#}_{\beta} = \{x \in \Lambda^{\#} \mid \mathrm{dist}(x, \partial^{\square}\Lambda^{\#} > \beta\}$,
da Dirichlet-Randwerte zu künstlicher Versteifung am Rand führen.

Randschicht $\beta = 0.125$ vgl. [Ün, Bevill, Keaveny J Biomech 39:1955]

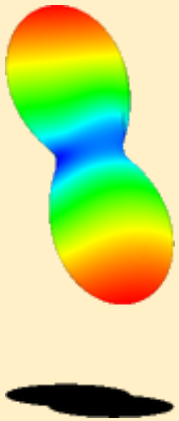
Ausrichtung und Visualisierung der effektiven Tensoren

Visualisierung als deformierte (uniaxiale Druck-Steifigkeit) und eingefärbte (Spur des entsprechenden Spannungstensors) Kugel.
[He et al., Int J Solids and Struct 10(1995), Cazzani et al., ebd., 40(2003)]



Ausrichtung und Visualisierung der effektiven Tensoren

Visualisierung als deformierte (uniaxiale Druck-Steifigkeit) und eingefärbte (Spur des entsprechenden Spannungstensors) Kugel.
[He et al., Int J Solids and Struct 10(1995), Cazzani et al., ebd., 40(2003)]



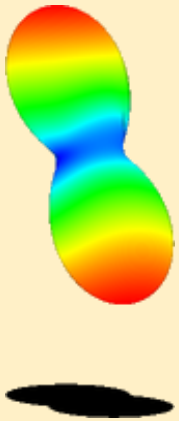
Orthotropie und ihre Achsen werden bestimmt durch Minimierung einer »Orthotropie-Verletzung« über Rotationen $Q \in A \subset \mathrm{SO}(3)$

$$F_{\bar{C}}(Q) = \frac{\|R_a[\bar{C}^Q]\|_{\mathrm{F}}^2}{\|R_b[\bar{C}^Q]\|_{\mathrm{F}}^2} \quad \text{wobei } \bar{C}^Q := Q_{mi}Q_{nj}Q_{pk}Q_{ql}\bar{C}_{ijkl}$$

vgl. [van Rietbergen et al., J Biomech 29(1996)]

Ausrichtung und Visualisierung der effektiven Tensoren

Visualisierung als deformierte (uniaxiale Druck-Steifigkeit) und eingefärbte (Spur des entsprechenden Spannungstensors) Kugel.
[He et al., Int J Solids and Struct 10(1995), Cazzani et al., ebd., 40(2003)]



$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Orthotropie und ihre Achsen werden bestimmt durch Minimierung einer »Orthotropie-Verletzung« über Rotationen $Q \in A \subset \mathrm{SO}(3)$

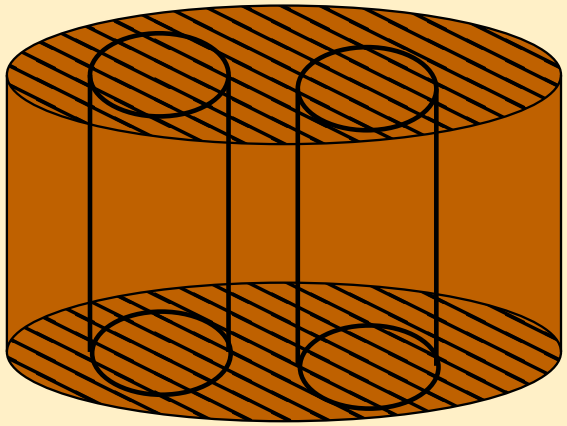
$$F_{\bar{C}}(Q) = \frac{\|R_a[\bar{C}^Q]\|_{\mathrm{F}}^2}{\|R_b[\bar{C}^Q]\|_{\mathrm{F}}^2} \quad \text{wobei } \bar{C}^Q := Q_{mi}Q_{nj}Q_{pk}Q_{ql}\bar{C}_{ijkl}$$

vgl. [van Rietbergen et al., J Biomech 29(1996)]

Homogenisierung auf Knochenproben

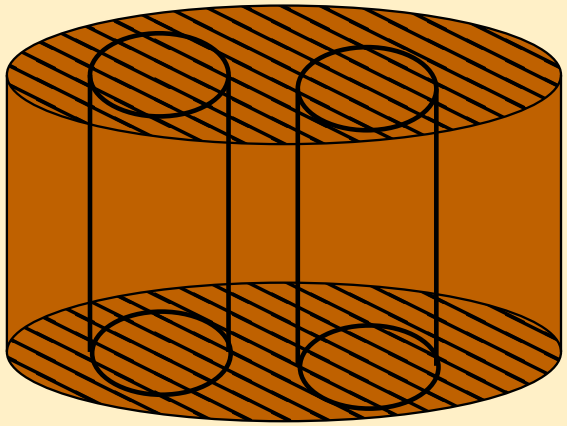
- entferne obere und untere Deckplatte

Homogenisierung auf Knochenproben



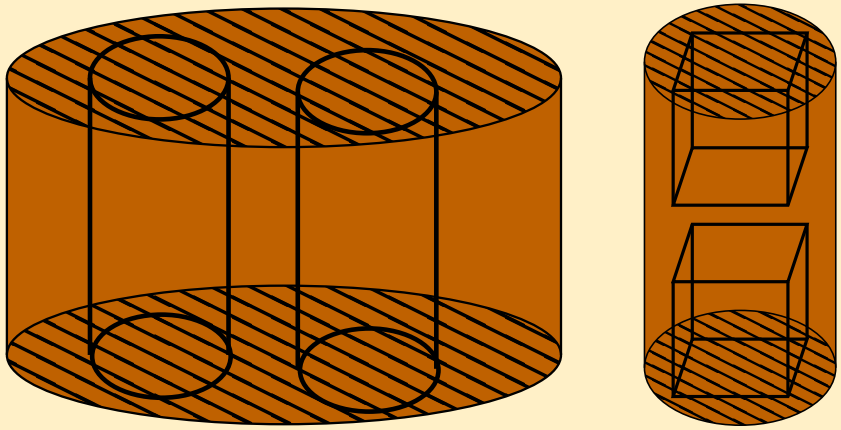
- entferne obere und untere Deckplatte
- zylindrische Proben (Höhe 12 mm, $\varnothing = 8$ mm)

Homogenisierung auf Knochenproben



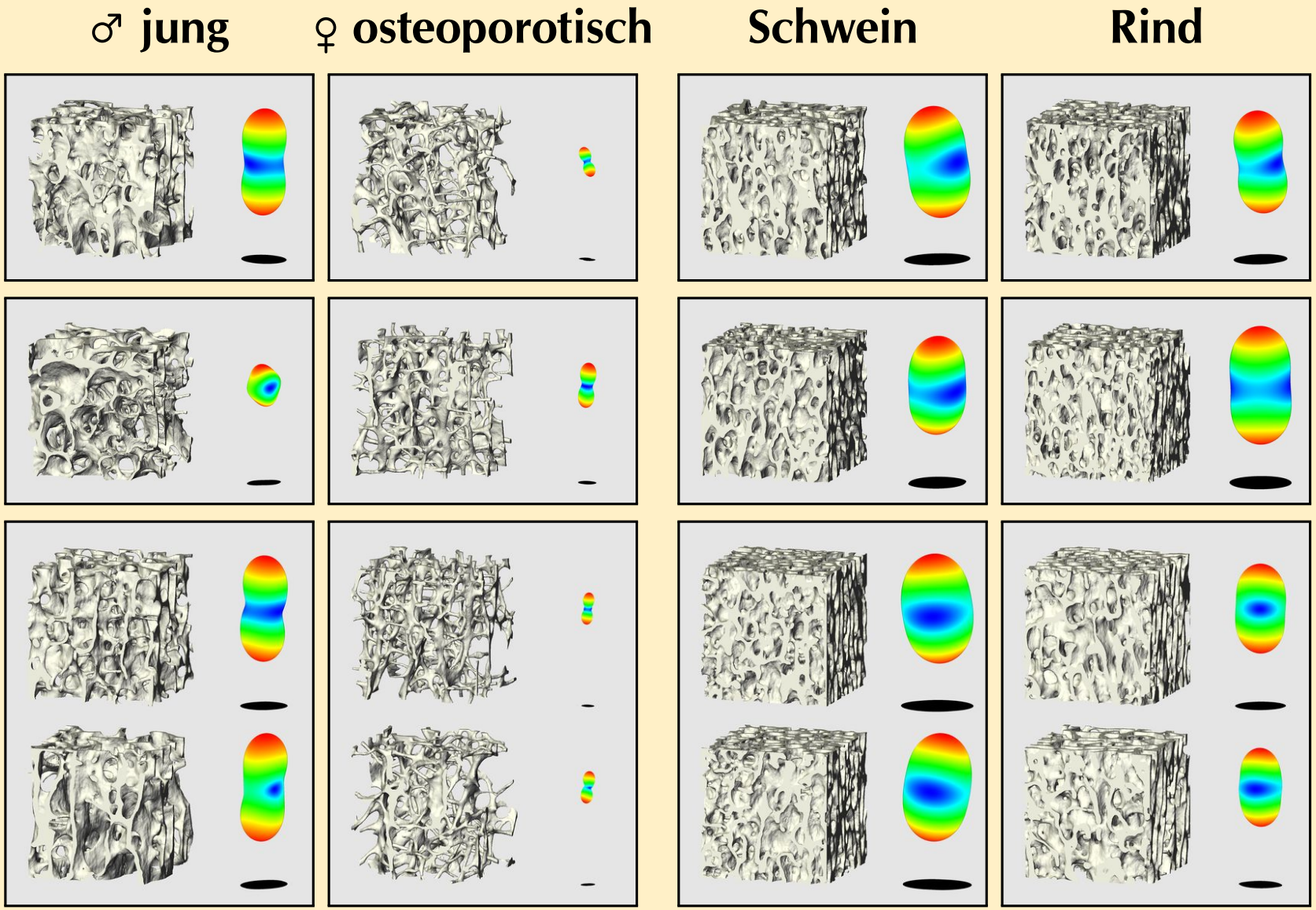
- entferne obere und untere Deckplatte
- zylindrische Proben (Höhe 12 mm, $\varnothing = 8$ mm)
- µCT-Scans mit 40 µm

Homogenisierung auf Knochenproben



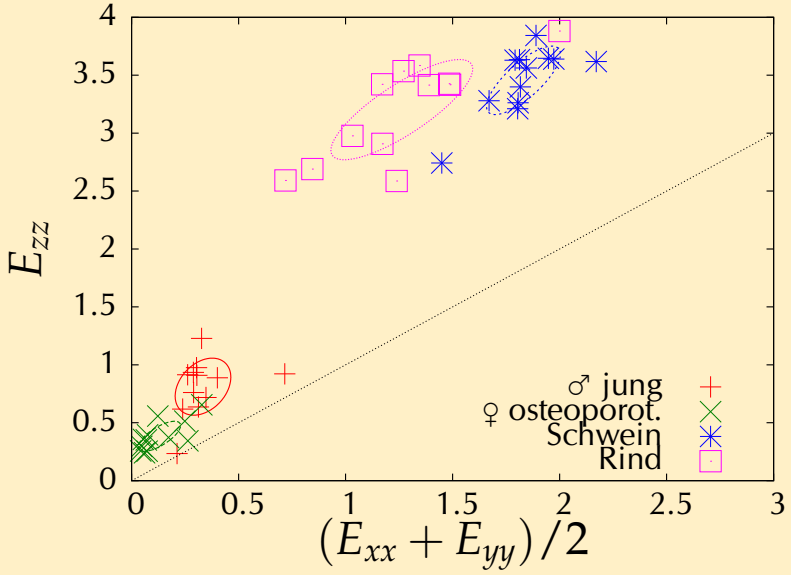
- entferne obere und untere Deckplatte
- zylindrische Proben (Höhe 12 mm, $\varnothing = 8$ mm)
- µCT-Scans mit 40 µm
- Würfel-Proben, Kantenlänge 5.16 mm

Knochenproben: einzelne Ergebnisse

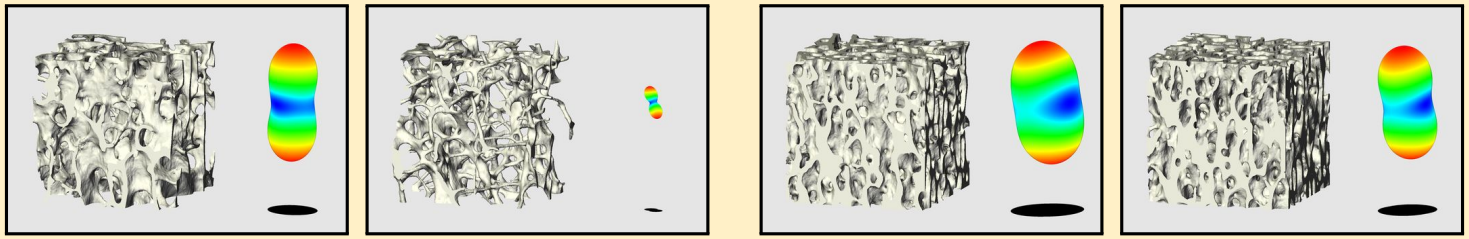


menschliche Tensoren um 4 vergrößert

Knochenproben: Statistik



- transverse Isotropie bzgl. craniocaudaler Achse angenommen
- Unterschiede zwischen Spezies



♂ jung ♀ osteoporot. Schwein Rind

Ausblick

- Fehlerabschätzungen im Falle springender Koeffizienten

Ausblick

- Fehlerabschätzungen im Falle springender Koeffizienten
- bessere Mehrgitter-Löser

Ausblick

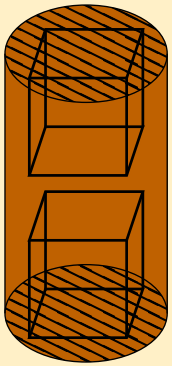
- Fehlerabschätzungen im Falle springender Koeffizienten
- bessere Mehrgitter-Löser
- experimentelle Validierung, andere Anwendungen

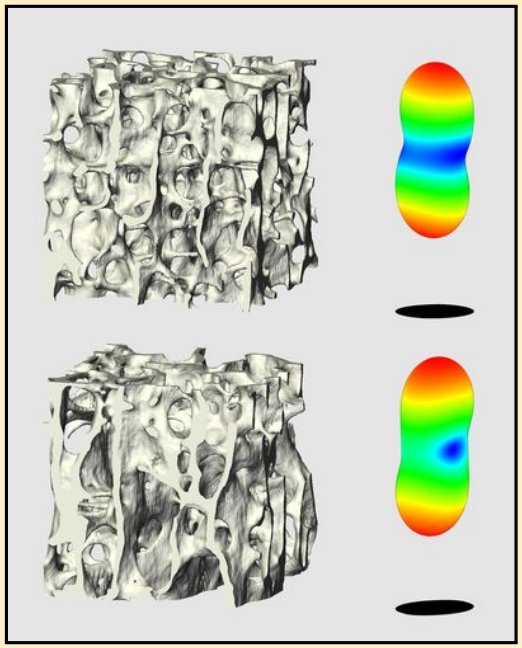
Ausblick

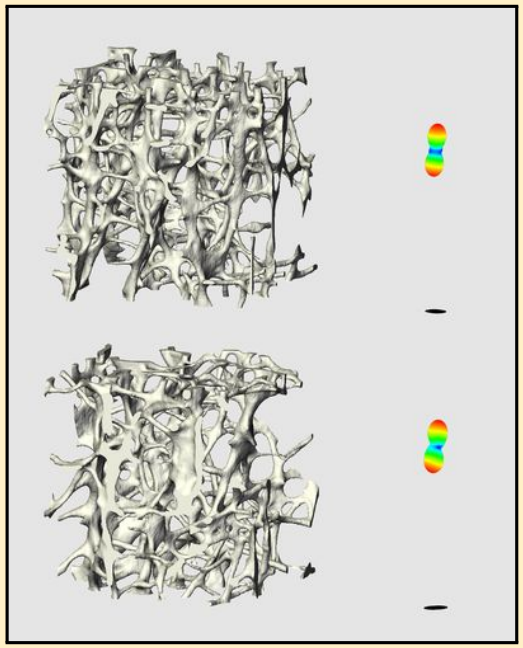
- Fehlerabschätzungen im Falle springender Koeffizienten
- bessere Mehrgitter-Löser
- experimentelle Validierung, andere Anwendungen
- echt zweiskalige Rechnung eines ganzen Wirbelkörpers

Ausblick

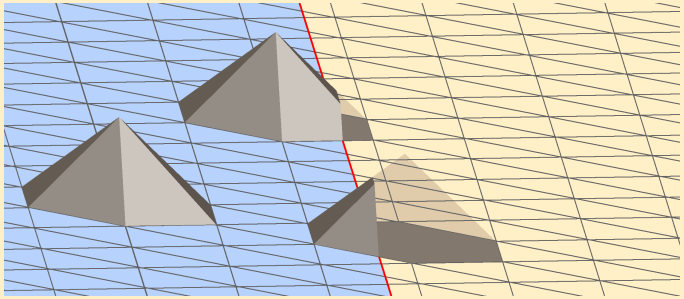
- Fehlerabschätzungen im Falle springender Koeffizienten
- bessere Mehrgitter-Löser
- experimentelle Validierung, andere Anwendungen
- echt zweiskalige Rechnung eines ganzen Wirbelkörpers (Spongiosa ist kein homogenes Material)

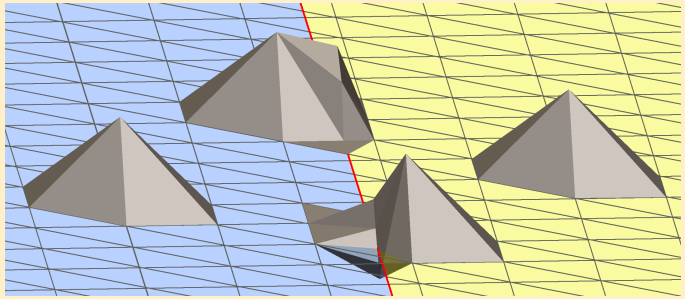


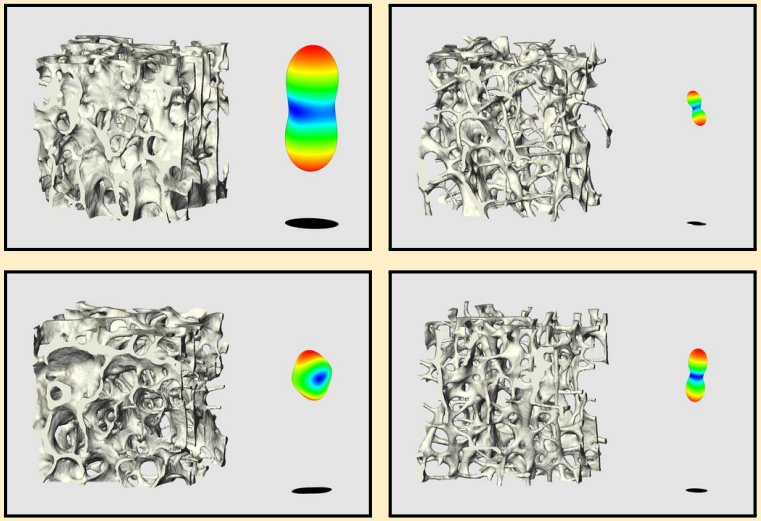


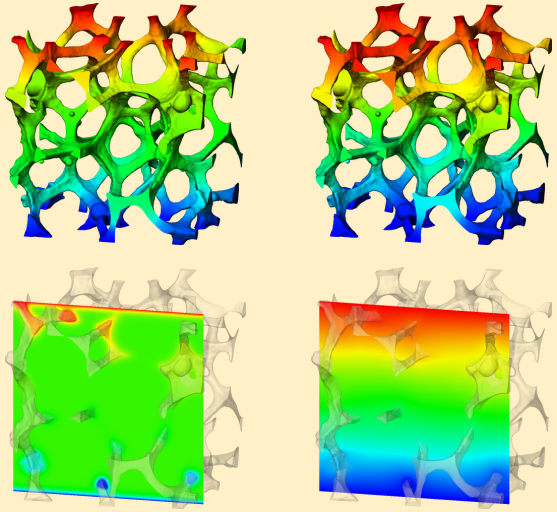


Zusammenfassung









http://www.numod.ins.uni-bonn.de
ole.schwen@ins.uni-bonn.de