

### 3. Übung      Goldener Schnitt

#### 1. Aufgabe

Beh:  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  für  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Bew: mit vollständiger Induktion

1. Anfang:  $n = 1$

$$\sum_{k=0}^1 q^k = ~~q^0 + q^1~~ q^0 + q^1 = 1 + q \quad \checkmark$$

$$\frac{1 - q^2}{1 - q} = \frac{(1 - q)(1 + q)}{(1 - q)} = 1 + q \quad \checkmark$$

↳ Annahme: die Beh. gilt für ein  $n \in \mathbb{N}$

1. Schluss:  $n \mapsto n + 1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1}$$

$$\stackrel{\text{I.A.}}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1}$$

$$= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

Damit gilt die Beh. für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

□

Betrachten wir den Sonderfall  $q = 1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$$

und für die rechte Seite erhalten wir

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{-(n+1)q^n}{-1}$$

mit der Regel von L'Hopital

$$= n + 1$$

Damit stimmt auch der Grenzwert überein.

□

## 2. Aufgabe:

b.) Weise nach, dass  $T$  der geforderte Teilpunkt ist, also

$$|AT| = \varphi |AB| \quad \text{mit} \quad \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Es gilt:  $|AT| = |EA| - |EB| = b - \frac{a}{2} \stackrel{!}{=} \varphi \cdot a$

nach Pythagoras gilt:  $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$

damit gilt  $\varphi \cdot a \stackrel{!}{=} b - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$

$$= \sqrt{a^2 \left(\frac{1}{4} + 1\right)} - \frac{a}{2}$$

$$= a \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}\right) = a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

also stimmt die Beh. mit  $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

□

## 3. Aufgabe:

Beh.:  $|BT| = \varphi |AB|$

Bew.: definiere ~~...~~  $b := |AB|$ ,  $c := |AE|$ ,  $a := |BE|$

dann gilt  $|BT| = c - a$  mit  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  und  $a = \frac{b}{2}$

also  $|BT| = \sqrt{\frac{b^2}{4} + b^2} - \frac{b}{2}$

$$= b \left(\sqrt{\frac{1}{4} + 1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= b \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = b \cdot \varphi = |AB| \varphi$$

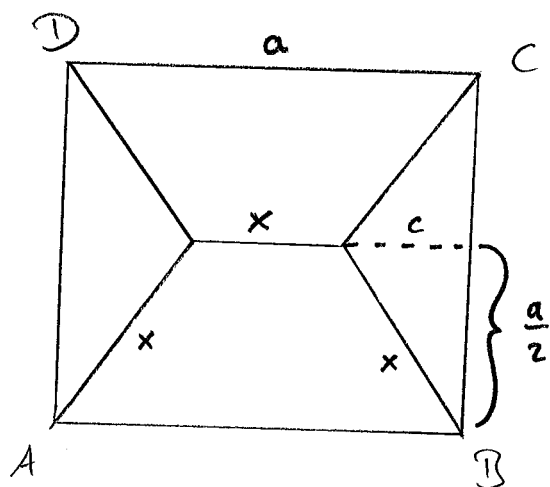
$\Rightarrow$  die Beh. gilt mit  $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

□

#### 4. Aufgabe:

gegeben: Quadrat ABCD mit Kantenlänge a

gesucht: Länge der 5 im Inneren liegenden Strecken x.



Für die Hilfsstrecke c gilt

$$c = \frac{a-x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = a - 2c$$

und für x gilt

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$a - 2c = \sqrt{\frac{a^2}{4} + c^2}$$

$$\Leftrightarrow c^2 - \frac{4}{3}ac + \frac{1}{4}a^2 = 0$$

p.-q Formel

$$\Rightarrow c_{1/2} = \frac{2}{3}a \pm \sqrt{\frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{4}a^2}$$

$$c_{1/2} = \frac{2}{3}a \pm \frac{\sqrt{7}}{6}a$$

einsetzen der positiven Lösung in die Gleichung für x gibt

$$x = a - 2 \cdot \left( \frac{2}{3}a + \frac{\sqrt{7}}{6}a \right)$$

$$\Leftrightarrow x = a \left( \frac{3 - 4 + \sqrt{7}}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = a \left( \frac{\sqrt{7} - 1}{3} \right)$$

