Prof. Dr. Heinz-Otto Peitgen
Dr. Reimund Albers

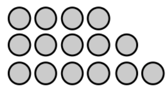
Wintersemester 2008/09

Ausgewählte Anwendungen der Mathematik

1. Übung: Folgen und Reihen

Präsenzübungen für Mittwoch, 22.10.

1. **Definition**: Eine natürliche Zahl heißt Trapezzahl, wenn sie als Summe von mindestens zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen dargestellt werden kann.
   Beispiel: 15 ist eine Trapezzahl, denn 15 = 4 + 5 + 6
   Erläuterung des Wortes: Stellt man die Summe als Punktmuster dar, so erhält man ein Trapez.
   (Analog zur Bezeichnung „Dreieckszahl“)



   Beachten Sie: Es müssen wenigstens zwei Summanden sein, das Trapez hat also eine Höhe von wenigstens zwei Reihen. Ist die oberste Reihe (kleinster Summand) 1, so handelt es sich (auch) um eine Dreieckszahl.
   a. Stellen Sie die Zahlen von 1 bis 20 so weit es geht als Trapezzahl dar.
   b. Wie kann man eine ungerade Zahl stets als Trapezzahl darstellen?
   c. Welche Teilbarkeitseigenschaft haben Zahlen aus 2, 3, 4, ... Summanden?
   d. Welche Strategie ergibt sich aus c., wenn man zu einer gegebenen Zahl eine Darstellung als Trapezzahl sucht?
   e. Gibt es Zahlen, die sich überhaupt nicht als Trapezzahl darstellen lassen? Geben Sie eine gute Begründung an.
   f. Stellen Sie 100 auf alle möglichen Weisen als Trapezzahl dar. Warum kann es keine weiteren Darstellungen als die von Ihnen gefundenen geben?

Hausübungen, Abgabe 29.10.

1. Aufgabe

a) Zur Folge $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$ haben wir die rekursive Form $a_n = a_{n-1} + 2(n-1) + 1$ hergeleitet. Leiten Sie eine Form her, in der a_n ausschließlich durch a_{n-1} definiert wird.

b) Leiten Sie zur geschlossenen Form $a_n = \frac{n-1}{n}$ eine rekursive Form her (es gibt hier verschiedene Lösungen). Machen Sie die Probe mit a_1 bis a_4.

2. Aufgabe Arithmetische Reihe

Berechnen Sie 3+7+11+15+ ... +99, indem Sie
a) rechnen wie der junge Gauß.
b) die endliche Reihe so umformen, dass Sie die endliche Reihe 1+2+3+...+?? erhalten und Sie dann die Summenformel $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ verwenden.

3. Aufgabe Mathematik und Musik

In der chromatischen (=temperierten) Stimmung wird die Frequenz des Grundtons über eine geometrische Folge in 12 Stufen zur Oktave (doppelte Frequenz des Grundtons) verändert.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} c & cis & d & dis & e & f & fis & g & gis & a & b & h & c' \\ 1 & & & & & & & & & & & & 2 \end{array}$$

$$\xrightarrow[\cdot q]{}$$

a) Wie groß ist q? (exakter Wert und dezimale Näherung auf 3 Stellen)
b) Die Quinte ($c \to g$) soll bei reiner Stimmung ein Frequenzverhältnis von 1,5 haben. Wie ist das bei der temperierten Stimmung? Berechnen Sie den Unterschied zwischen exakter und temperierter Stimmung bei einem Grundton c von 600 Hz.

4. Zahlenfolgen und Primzahlen

a) Berechnen Sie zu $a_n = n^2 + n + 41$ die Folgeglieder für $n = 1,2,3,...,10$ und prüfen Sie, ob sie Primzahlen sind.
b) Berechnen Sie a_{40} und a_{41} und zeigen Sie, dass es keine Primzahlen sind. (Primfaktorzerlegung)
c) Begründen Sie, dass die Zahlenfolge $a_n = bn^2 + cn + d,\ \ b,c,d \in \mathbb{N},\quad n \in \mathbb{N}$ nicht nur Primzahlen als Folgeglieder haben kann.